Math. P. 715 X

<3660395346001O

<366039534600l0

Bayer. Staatsbibliothek

H 6/73

A. L. Cauchy's

Lehrbuch

der

algebraischen Analysis.

Aus dem Französischen übersetzt

von.

C. L. B. Huzler,

Conrector an der Löbenicht'schen höheren Stadtschule in Königsberg.

Bayerische Staatsbibliothek München

K. B. CADETTEN CORPS BIBLIOTHEK

BIBLIOTHEK DER K. B. MILITAER BILDUNGS ANSTALTEN

Königsberg,

im Verlage der Gebrüder Borntträger.

1828.

Math. P. 715 x

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Gedruckt bei Fr. Brockhaus in Leipzig.

164 H

Seiner Excellenz

dem Herrn

Friedrich Ludwig,

Grafen zu Waldburg-Truchseß

Königl. Preuß. außerordentlichem Gesandten und bevollmächtigtem Minister am Königl. Niederländischen Hofe, General-Major von der Armee, Ritter des rothen Adlerordens zweiter Classe mit Eichenlaub, Ritter des Königl. Bair. Max-Joseph-Ordens, Großkreuz des Königl. Sardin. Mauritius- und Lazarus-Ordens, des Ordens beider Sicilien und des Königl. Würtemb. Militair-Verdienstordens der Krone ꝛc. ꝛc. ꝛc.

in tiefster Ehrfurcht gewidmet

vom

Uebersetzer.

Vorwort des Uebersetzers.

Cauchy's mathematische Schriften, welche durch die darin vorherrschende mathematische Eleganz, durch Gründlichkeit und Feinheit des Raisonnements (bei großer Klarheit und Faßlichkeit im Vortrage) und endlich durch ein streng wissenschaftliches Fortschreiten nach völlig bestimmten Principien gewiß jeden Freund der Mathematik, den Anfänger wie den Gelehrten, im höchsten Grade ansprechen müssen, sind bereits öfters in den Schriften anderer Gelehrten citirt und von ihnen mit Recht den Mathematikern empfohlen worden. Ganz besonderes Verdienst um die Wissenschaft hat sich indessen Cauchy durch sein Lehrbuch der Analysis erworben. Von dem Wunsche beseelt, daß dieses ausgezeichnete Werk des französischen Mathematikers, welches seiner Trefflichkeit wegen in fast allen höheren Schulanstalten Frankreichs eingeführt worden ist, auch in Deutschland allgemein bekannt und von Lehrenden und Lernenden benutzt werden

möge, und in der, wie ich glaube nicht ganz unlöblichen, Absicht, dieses Werk auch Denjenigen unter meinen Landsleuten, welche entweder der französischen Sprache ganz unkundig, oder doch derselben nicht mächtig genug sind, um die Werke französischer Mathematiker mit Leichtigkeit im Originale lesen zu können, zugänglich zu machen, oder doch das Studium desselben zu erleichtern, unternahm ich die Uebersetzung des Lehrbuches, von welcher hier der erste Theil (die algebraische Analysis) erscheint.

Wenn der Leser dieser meiner Uebersetzung beim Durchlesen derselben nie daran erinnert wird, daß er eine Uebersetzung vor sich hat; wenn er, angezogen und erbaut durch den Inhalt des Buches, mir für meine Arbeit vielleicht sogar einigen Dank weiß, so bleibt mir nichts zu wünschen übrig.

Königsberg, den 5ten Januar 1828.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Einleitung.

Männer, welche die ersten Schritte in meiner wissenschaftlichen Laufbahn zu leiten die Güte hatten, und dankbar erwähne ich unter diesen der Herren Laplace und Poisson, haben die Herausgabe eines analytischen Cursus in der königlichen polytechnischen Schule gewünscht, und ich habe mich daher entschlossen, diesen Cursus zu größerem Nutzen der Zöglinge schriftlich aufzusetzen. Es erscheint hier der unter dem Namen „algebraische Analysis" bekannte erste Theil, in welchem ich mich mit den verschiedenen Arten von reellen und imaginären Functionen, mit den convergirenden und divergirenden Reihen, mit der Auflösung der Gleichungen und mit der Zerlegung der rationalen Brüche beschäftige. Da, wo von der Stetigkeit der Functionen die Rede ist, habe ich nicht umhin gekonnt, die Haupteigenschaften unendlich kleiner Größen nachzuweisen, welche die Grundlage des Infinitesimalcalculs bilden. Endlich habe ich in den Vorerinnerungen und in einigen dem Buche angehängten Noten noch Dieses und Jenes entwickelt, was für die Professoren und Zöglinge der königlichen Collegien sowohl, als auch für diejenigen, welche die Analysis zu ihrem speciellen Studium machen, nützlich sein kann.

Was die Lehrmethode betrifft, so habe ich ihr dieselbe Strenge zu geben gesucht, welche man in der Geometrie verlangt, so daß ich niemals zu Beweisgründen meine Zuflucht genommen habe, welche von der algebraischen Allgemeingiltigkeit hergenommen sind. Beweisgründe dieser Art, obgleich man dieselben gewöhnlich, und besonders beim Uebergange von den convergirenden zu den divergirenden Reihen und von den reellen Größen zu den imaginären Ausdrücken, zuläßt, dürfen meiner Meinung nach nur als Inductionen angesehen werden, welche zuweilen die Wahrheit errathen lassen, sich jedoch wenig mit der so gepriesenen Genauigkeit in den mathematischen Wissenschaften vertragen. Es verdient bemerkt zu werden, daß dergleichen Inductionen dazu verleiten, daß man den algebraischen Formeln eine unbestimmte Ausdehnung gibt, während dieselben, beim Lichte besehen, größtentheils nur unter gewissen Bedingungen gelten, und für gewisse Werthe der in ihnen enthaltenen Größen. Dadurch, daß ich diese Bedingungen und Werthe, so wie auch die Bedeutung der Zeichen, deren ich mich bediene, genau bestimme, hebe ich alle Ungewißheit auf, und die verschiedenen Formeln bieten alsdann nur noch Relationen zwischen den reellen Größen dar; Relationen, welchen man leicht Genüge leisten kann, indem man nur für die Größen Zahlen zu substituiren braucht. Freilich habe ich, um diesen Principien beständig treu bleiben zu können, mich genöthigt gesehen, mehrere Sätze gut zu heißen, welche vielleicht auf den ersten Anblick etwas hart scheinen werden. So z. B. behaupte ich im sechsten Capitel, daß eine divergirende Reihe keine Summe hat; im siebenten Capitel, daß eine imaginäre Gleichung nichts weiter als eine symbolische Darstellung zweier Gleichungen zwischen reellen Größen ist; im neunten Capitel, daß, wenn in einer Function enthaltene Constanten oder Veränderliche, welche zuvörderst als reelle Größen betrachtet wurden, imaginär werden, die Bezeichnung, mittelst

welcher die Function ausgedrückt wurde, nur in Folge einer neuen Annahme, durch welche die Bedeutung dieser Bezeichnung für den letzteren Fall bestimmt wird, in der Rechnung beibehalten werden kann ꝛc. Die Leser meines Werks werden sich indessen, wie ich hoffe, davon überzeugen; daß die Analysis durch die Sätze von dieser Art offenbar gewinnt, indem dieselben glücklicherweise mehr Schärfe in den Theoremen nöthig machen und nützliche Einschränkungen bei allzuweit ausgedehnten Wahrheiten bedingen, und daß diese Sätze öfters Stoff zu Betrachtungen von einiger Wichtigkeit geben. So z. B. mußte ich, bevor ich zur Summirung irgend einer Reihe schreiten konnte, erst untersuchen, in welchen Fällen die Reihen summirt werden können, oder mit andern Worten, welches die Bedingungen ihrer Convergenz sind, und ich habe zu diesem Zwecke einige allgemeine Regeln aufgestellt, welche mir einige Beachtung zu verdienen scheinen. Uebrigens habe ich mich einerseits bemüht, die mathematische Analysis zu vervollkommnen, bin aber andererseits weit entfernt, zu behaupten, daß man mit dieser Analysis bei allen speculativen Wissenschaften ausreichen müsse. So besteht ohne Zweifel bei naturwissenschaftlichen Untersuchungen die einzige Methode, welche man mit Erfolg kann anwenden, darin, daß man die Erscheinungen beobachtet sodann und die Beobachtungen dem Calcul unterwirft. Es wäre aber ein grober Irrthum, wenn man nur in den geometrischen Beweisen oder in dem Zeugnisse der Sinne Gewißheit finden zu können glaubte, und obgleich niemand bis auf diesen Tag einen analytischen Beweis für die Existenz des Augustus oder Ludwig XIV. zu geben versucht hat, so wird doch jeder vernünftige Mensch zugeben, daß diese ihre Existenz eben so gewiß sein kann, als der große Pythagoräische oder der Maclaurin'sche Lehrsatz. Ja, der Beweis des letzteren ist sogar nur für Wenige faßlich, und die Gelehrten selbst sind darüber uneinig, in welcher Ausdehnung derselbe gilt; während alle Welt weiß, von wem

Frankreich im siebzehnten Jahrhunderte beherrscht wurde, so daß über diesen Punct vernünftigerweise auch nicht der geringste Streit stattfinden kann. Was hier von einem historischen Factum gesagt worden ist, läßt sich auch auf eine Menge von Sätzen in der Religion, in der Moral, in der Politik anwenden. Wir können uns demnach überzeugt halten, daß es außer den algebraischen Wahrheiten und außer den Realitäten, welche die Gegenstände unserer sinnlichen Auffassung sind, noch andere gibt. Wir wollen daher den mathematischen Wissenschaften mit Eifer obliegen, ohne jedoch ihr eigentliches Gebiet überschreiten zu wollen; sind also auch weit entfernt, auf den Einfall zu kommen, daß man die Geschichte durch mathematische Formeln angreifen, oder die Moral durch Lehrsätze der Algebra oder der Integralrechnung sanctioniren könne.

Indem ich diese Einleitung beendige, kann ich nicht umhin, dankbar zu bekennen, daß ich mehreren Personen, besonders aber den Herren Poisson, Ampère und Coriolis für gütigen Rath und Aufschlüsse verbunden bin, welche mir sehr nützlich gewesen sind. Dem Letzteren verdanke ich unter andern die Regel über die Convergenz von Producten, welche aus unendlich vielen Factoren bestehen; auch habe ich öfters die Betrachtungen des Herrn Ampère, so wie auch die von ihm in seinen „Leçons d'analyse" entwickelten Methoden benutzt.

Inhaltsverzeichniß.

Vorerinnerungen.

Seite

Uebersicht der verschiedenen Arten reeller Größen, welche sowohl in der Algebra als in der Trigonometrie betrachtet werden, und der Zeichen, vermittelst welcher man sie darstellt 1

Erster Theil.

Algebraische Analysis.

Erstes Capitel. Von den reellen Functionen.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die Functionen . . 15
§. 2. Von den einfachen Functionen 17
§. 3. Von den zusammengesetzten Functionen 18

Zweites Capitel. Von den Größen, welche entweder unendlich klein oder unendlich groß sind, und von der Stetigkeit der Functionen. — Besonders merkwürdige Werthe der Functionen in einzelnen Fällen.

§. 1. Vom unendlich Kleinen und unendlich Großen . . 21
§. 2. Von der Stetigkeit der Functionen 26
§. 3. Besonders merkwürdige Werthe der Functionen in einzelnen Fällen 34

Seite

Drittes Capitel. Von den symmetrischen und alternirenden Functionen. — Anwendung dieser Functionen bei Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer beliebigen Anzahl von unbekannten Größen. — Von den homogenen Functionen.

§. 1. Von den symmetrischen Functionen 53
§. 2. Von den alternirenden Functionen 55
§. 3. Von den homogenen Functionen 61

Viertes Capitel. Bestimmung ganzer Functionen aus einer gewissen Anzahl als bekannt vorausgesetzter besonderen Werthe. Beispiele der Anwendung.

§. 1. Bestimmung der ganzen Functionen mit einer Veränderlichen, von welchen man eine gewisse Anzahl besonderer Werthe kennt 64
§. 2. Bestimmung ganzer Functionen von mehreren Veränderlichen aus einer gewissen Anzahl als bekannt vorausgesetzter besonderen Werthe 70
§. 3. Beispiele der Anwendung 73

Fünftes Capitel. Bestimmung der stetigen Functionen mit einer einzigen Veränderlichen, welche gewissen Bedingungen Genüge leisten sollen.

§. 1. Es wird eine stetige Function gesucht, von der Beschaffenheit, daß die Summe oder das Product zweier ähnlichen Functionen irgend welcher Veränderlichen eine ähnliche Function der Summe oder des Productes dieser Veränderlichen ist 78
§. 2. Es wird eine stetige Function von der Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man zwei ähnliche Functionen veränderlicher Größen mit einander multiplicirt und das Product verdoppelt, das Resultat demjenigen gleich ist, welches man erhalten würde, wenn man die ähnlichen Functionen der Summe und der Differenz dieser Veränderlichen addirte 85

Seite

Sechstes Capitel. Von den (reellen) convergirenden und divergirenden Reihen. Regeln in Beziehung auf die Convergenz der Reihen. Summation einiger convergirenden Reihen.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die Reihen 92
§. 2. Von den Reihen, deren Glieder alle positiv sind . 98
§. 3. Von den Reihen, welche sowohl positive als negative Glieder haben 105
§. 4. Von den nach den aufsteigenden ganzen Potenzen einer Veränderlichen geordneten Reihen 111

Siebentes Capitel. Von den imaginären Ausdrücken und ihren Modulis.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die imaginären Ausdrücke 127
§. 2. Von den Modulis der imaginären Ausdrücke und von den reducirten Ausdrücken 133
§. 3. Von den reellen und imaginären Wurzeln der beiden Größen $+1$ und -1, und von deren gebrochenen Potenzen 143
§. 4. Von den Wurzeln aus imaginären Ausdrücken und von deren gebrochenen und irrationalen Potenzen 157
§. 5. Beispiele der Anwendung der in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Principien 165

Achtes Capitel. Von den imaginären Veränderlichen und Functionen.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die imaginären Veränderlichen und Functionen 173
§. 2. Von den unendlich kleinen imaginären Ausdrücken und von der Stetigkeit der imaginären Functionen 179
§. 3. Von den symmetrischen, alternirenden und homogenen imaginären Functionen 181
§. 4. Von den imaginären ganzen Functionen von einer oder von mehreren Veränderlichen. . . . . —

Seite

§. 5. Bestimmung von stetigen imaginären Functionen einer einzigen Veränderlichen, welche gewissen Bedingungen Genüge leisten sollen 185

Neuntes Capitel. Von den convergirenden und divergirenden imaginären Reihen. Bezeichnungen einiger imaginären Functionen, welche man durch Summirung eben dieser Reihen erhält.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die imaginären Reihen 194

§. 2. Von den imaginären Reihen, welche nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen einer Veränderlichen geordnet sind 201

§. 3. Bezeichnungen einiger imaginären Functionen, welche man durch Summirung convergirender Reihen erhält. Eigenschaften dieser Functionen 218

Zehntes Capitel. Von den möglichen oder imaginären Wurzeln der algebraischen Gleichungen, deren erster Theil eine rationale und ganze Function einer einzigen Veränderlichen ist. Auflösung einiger Gleichungen dieser Art mit Hülfe der Algebra oder der Trigonometrie.

§. 1. Man kann jeder Gleichung, deren erster Theil eine rationale und ganze Function von x ist, durch reelle oder imaginäre Werthe dieser Veränderlichen Genüge leisten. Zerlegung der Polynomien in Factoren vom ersten oder vom zweiten Grade 231

§. 2. Algebraische oder trigonometrische Auflösung der binomischen und einiger trinomischen Gleichungen. Lehrsätze von Moivre und Cotes 243

§. 3. Algebraische oder trigonometrische Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades . . 248

Elftes Capitel. Zerlegung der rationalen Brüche.

§. 1. Zerlegung einer rationalen gebrochenen Function in zwei andere Functionen derselben Art. 256

Seite

§. 2. Zerlegung eines rationalen Bruches, dessen Nenner das Product mehrerer ungleichen lineären Factoren ist, in einfache Brüche, welche diese lineären Factoren zu ihren respectiven Nennern haben, und deren Zähler constant sind 260

§. 3. Zerlegung eines gegebenen rationalen Bruches in andere einfachere Brüche, welche die respectiven lineären Factoren des ersteren, oder Potenzen eben jener Factoren, zu Nennern, und Constanten zu Zählern haben 267

Zwölftes Capitel. Von den recurrenten Reihen.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die recurrenten Reihen 273

§. 2. Entwickelung der rationalen Brüche in recurrente Reihen 274

§. 3. Summation der recurrenten Reihen, und Bestimmung ihres allgemeinen Gliedes 281

Noten.

Seite

Erste Note. Ueber die Theorie der positiven und negativen Größen 283

Zweite Note. Von den Formeln, welche aus dem Gebrauche des Zeichens $>$ oder $<$ entspringen, und von den Mitteln zwischen mehreren Größen 311

Dritte Note. Von der Auflösung numerischer Gleichungen 326

Vierte Note. Ueber die Entwickelung der alternirenden Function

$(y-x)\times(z-x)(z-y)\times\ldots\times(v-x)(v-y)(v-z)\ldots(v-u)$

. 369

Seite

Fünfte Note. Ueber die Interpolationsformel von Lagrange 372

Sechste Note. Von den figurirten Zahlen 376

Siebente Note. Von den doppelten Reihen 382

Achte Note. Ueber die Formeln, vermittelst deren man den Sinus oder Cosinus eines Vielfachen von einem Bogen in ein Polynom verwandeln kann, dessen Glieder die aufsteigenden Potenzen des Sinus oder des Cosinus dieses Bogens zu Factoren haben 391

Neunte Note. Von den Producten, welche durch unendlich viele Factoren gebildet werden 403

Vorerinnerungen.

Ueberficht der verschiedenen Arten reeller Größen, welche sowohl in der Algebra, als in der Trigonometrie betrachtet werden, und der Zeichen, vermittelst welcher man sie darstellt.

Um in der algebraischen Sprache und Bezeichnungsart jede Verwirrung zu vermeiden, wollen wir in diesen Vorerinnerungen bestimmen, was wir unter mehreren, theils aus der niederen Algebra, theils aus der Trigonometrie entlehnten, Ausdrücken und Bezeichnungen verstanden wissen wollen. Ohne die Erläuterungen, welche wir in dieser Beziehung geben werden, würden wir nicht die volle Ueberzeugung haben können, daß die Leser dieses Werkes uns vollkommen verstehen werden. Zuvörderst wollen wir die Begriffe feststellen, welche, unserer Ansicht nach, mit den beiden Ausdrücken Zahl und Zahlengröße verbunden werden müssen. Wir werden die Benennung Zahlen stets in demjenigen Sinne gebrauchen, in welchem man dieselbe in der Arithmetik gebraucht, indem man die Zahlen aus dem absoluten Maße der Größen herleitet; den Namen Zahlengrößen dagegen werden wir einzig und allein den reellen, positiven oder negativen Zahlen beilegen, d. h. denjenigen Zahlen, vor welchen die Zeichen + oder — stehen.

Wir werden außerdem noch diese Zahlengrößen als solche ansehen, welche bestimmt sind, einen gewissen Zuwachs oder eine

gewisse Verminderung auszudrücken, so daß also eine gegebene Größe schlechthin durch eine Zahl ausgedrückt werden wird, wenn man sich damit begnügt, dieselbe mit einer als Einheit angenommenen Größe derselben Art zu vergleichen; durch eben diese Zahl aber, jedoch mit dem Zeichen + oder —, wenn man sie sich so denkt, daß sie zur Vermehrung oder Verminderung einer bestimmten Größe derselben Art dienen soll. Das Zeichen + oder — vor einer Zahl wird demnach deren Bedeutung modificiren, so ungefähr, wie ein Adjectivum die des Substantivums modificirt. Wir verstehen ferner unter dem Zahlenwerthe einer Zahlengröße die ihr zum Grunde liegende Zahl; unter gleichen Zahlengrößen diejenigen, welche einerlei Zeichen und einen Zahlenwerth haben; unter entgegengesetzten Zahlengrößen aber: zwei Zahlengrößen von gleichem Zahlenwerthe, aber mit entgegengesetzten Zeichen.

Wenn man von diesen Principien ausgeht, ist es leicht, die verschiedenen Operationen aufzuzählen, denen man die Zahlengrößen unterwerfen kann. Wenn z. B. zwei Zahlengrößen gegeben sind, so wird man immer eine dritte finden können, die, wenn man sie als Zuwachs einer bestimmten Zahl ansieht, im Falle sie positiv; als Verminderung dieser Zahl dagegen, im Falle sie negativ ist, zu demselben Resultate führt, als die beiden gegebenen Zahlengrößen, wenn man sie beide nach einander zu gleichem Gebrauche anwendet. Diese dritte Zahlengröße, welche für sich allein dasselbe bewirkt, was die beiden andern bewirken, heißt Summe. Die Summe der beiden Zahlengrößen — 10 und + 7 ist also — 3, indem eine Verminderung um 10 Einheiten, zu einer Vermehrung um 7 Einheiten hinzugefügt, einer Verminderung um 3 Einheiten gleichgesetzt werden kann. Zwei Zahlengrößen addiren, heißt ihre Summe finden.

Die Differenz zwischen einer Zahlengröße und einer andern ist eine dritte Zahlengröße, welche, zur zweiten addirt, die erste ergibt. — Endlich nennt man eine Zahlengröße größer oder kleiner, als eine andere, je nachdem die Differenz zwischen jener und dieser positiv oder negativ ist. Nach dieser Definition sind

die positiven Zahlengrößen stets größer, als die negativen, und diese müssen für um so kleiner angesehen werden, je größer ihre Zahlenwerthe sind. Man bezeichnet in der Algebra nicht nur die Zahlen, sondern auch die Zahlengrößen durch Buchstaben. Da man übereingekommen ist, die absoluten (natürlichen) Zahlen zu den positiven Zahlengrößen zu rechnen, so kann man die positive Zahlengröße, deren Werth die Zahl A ist, sowohl durch + A, als auch durch A allein bezeichnen, während die entgegengesetzte negative Zahlengröße durch — A zu bezeichnen sein wird. Eben so betrachtet man, der erwähnten Uebereinkunft gemäß, wenn der Buchstabe a eine Zahlengröße bezeichnet, die beiden Ausdrücke a und + a als gleichbedeutend und bezeichnet durch — a die dem + a entgegengesetzte Zahlengröße. Diese Bemerkungen werden den Gebrauch der Zeichen hinreichend erklären. [S. Note 1.]

Variable (veränderliche) Zahlengrößen nennt man diejenigen, welche verschiedene Werthe haben können. Man bezeichnet eine solche Zahlengröße gewöhnlich durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets. Man nennt dagegen jede Zahlengröße, welche einen bestimmten Werth hat, constant (beständig) und bezeichnet dieselbe gewöhnlich durch einen der ersten Buchstaben des Alphabets. Wenn die einer variabeln Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt der letztere die Grenze aller übrigen. So ist z. B. eine irrationale Zahl die Grenze der verschiedenen Brüche, welche ihre immer mehr und mehr genäherten Werthe bilden. In der Geometrie ist die Kreisfläche die Grenze, welcher sich die Flächen der eingeschriebenen Vielecke nähern, wenn die Anzahl ihrer Seiten immer größer und größer wird ꝛc.

Wenn die successiven Zahlenwerthe einer und derselben Veränderlichen bis ins Unendliche abnehmen, so daß sie zuletzt kleiner werden, als jede anzugebende Zahl, so wird diese Veränderliche das, was man ein unendlich Kleines oder eine unendlich kleine Zahlengröße nennt. Eine Veränderliche dieser Art hat Null zur Grenze. Wenn die successiven Zahlenwerthe

einer und derselben Veränderlichen immer größer und größer werden, so daß sie zuletzt jede anzugebende Zahl übersteigen, so sagt man: diese Veränderliche habe, wenn sie positiv ist, das positive Unendliche, welches durch ∞ bezeichnet wird, wenn sie dagegen negativ ist, das negative Unendliche, welches durch $-\infty$ bezeichnet wird, zur Grenze. Das positive und das negative Unendliche werden zusammen unendliche Zahlengrößen genannt. Die Zahlengrößen, welche sich uns im Calcul als Resultate der, in Beziehung auf eine oder mehrere andere constante oder variable Zahlengrößen unternommenen, Operationen darbieten, können, je nach Beschaffenheit der Operationen, durch welche sie gefunden werden, in verschiedene Classen eingetheilt werden. So unterscheidet man in der Algebra die Summen und Differenzen, die Producte und Quotienten, die Potenzen und Wurzeln, die Exponentialgrößen und Logarithmen; in der Trigonometrie: die Sinus und Cosinus, Secanten und Cosecanten, Tangenten und Cotangenten und die Kreisbogen, für welche eine trigonometrische Linie (Function) gegeben ist. Um alles, was sich auf diese letzteren Classen von Zahlengrößen bezieht, gehörig zu verstehen, ist es nöthig, sich an Folgendes zu erinnern.

Eine auf einer geraden oder krummen Linie angenommene Länge kann, wie jede andere Art von Größen, unter die Form einer Zahl oder unter die einer Zahlengröße gebracht werden: unter die einer Zahl, wenn man einzig und allein auf das Maß ihrer Länge Rücksicht nimmt; unter die einer Zahlengröße dagegen, d. h. einer mit dem Zeichen $+$ oder $-$ behafteten Zahl, wenn man die Länge, mit welcher man es zu thun hat, als von einem bestimmten Puncte einer gegebenen Linie aus entweder nach einer oder nach der andern Richtung aufgetragen ansieht, so daß sie eine in diesem Puncte sich endigende Länge entweder vermehren oder vermindern würde. Der bestimmte Punct, von welchem hier die Rede ist, und von welchem aus man die durch die Zahlengrößen bezeichneten variablen Längen auftragen soll, wird der Anfangspunct dieser Längen genannt.

Zwei Längen, deren Anfangspunct ein und derselbe, deren Richtung aber entgegengesetzt ist, müssen durch Zahlengrößen mit entgegengesetzten Zeichen bezeichnet werden.

Man kann die Richtung, in welcher man die durch die positiven Zahlengrößen bezeichneten Längen sich denkt, nach Belieben wählen; wenn aber diese Wahl einmal getroffen ist, wird man nothwendigerweise die durch negative Zahlengrößen bezeichneten Längen in entgegengesetzter Richtung zu nehmen haben.

In einem Kreise, dessen Ebene man sich vertical denken mag, wählt man gewöhnlich als Anfangspunct der Bogen den Endpunct des horizontal von der Linken zur Rechten gezogenen Radius und sieht diejenigen Bogen, welche von diesem Puncte aus sich nach oben erstrecken, als die positiven an, d. h. als diejenigen, welche durch positive Zahlengrößen bezeichnet werden. Nimmt man den Radius des Kreises als Einheit an, so wird der Sinus eines Bogens (d. h. die Projection des durch den Endpunct dieses Bogens gehenden Radius auf den verticalen Durchmesser des Kreises) in der Richtung von unten nach oben als positiv, in der entgegengesetzten Richtung hingegen als negativ angenommen, indem man vom Mittelpuncte des Kreises als Anfangspunct der Sinus ausgeht. Die Tangente denkt man sich positiv, wenn sie vom Anfangspuncte der Bogen aus auf der durch diesen Anfangspunct gezogenen Verticallinie (Tangente) dieselbe Richtung hat, in welcher der Sinus positiv wird. Endlich denkt man sich die Secante auf dem durch den Endpunct des Bogens gezogenen Radius vom Mittelpuncte aus positiv, wenn sie die Richtung dieses Radius hat.

Oft kann das Resultat einer in Beziehung auf eine Zahlengröße vorgenommenen Operation mehrere von einander verschiedene Werthe haben. So oft wir irgend einen dieser Werthe, ohne Unterschied, bezeichnen wollen, werden wir uns einer besondern Bezeichnungsart bedienen, welche darin bestehen soll, daß der Zahlengröße ein doppeltes Zeichen oder eine doppelte Klammer beigefügt wird; die gewöhnliche Bezeichnungsart für den einfachsten Werth oder für denjenigen aufsparen, welcher vorzugsweise beachtet zu werden verdient. So hat z. B., wenn a

eine positive Zahlengröße ist, die Quadratwurzel aus derselben zwei Werthe, welche numerisch gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind, und von welchen irgend einer durch

$$((a))^{\frac{1}{2}} \text{ oder } \mathbb{W}a$$

bezeichnet werden wird, während der einzige positive Werth bezeichnet wird durch

$$a^{\frac{1}{2}} \text{ oder } \sqrt{a},$$

so, daß man also haben wird

$$1) \qquad \mathbb{W}a = \pm \sqrt{a},$$

oder, was gleichbedeutend ist,

$$2) \qquad ((a))^{\frac{1}{2}} = \pm a^{\frac{1}{2}}.$$

Eben so wird, wenn a eine positive oder negative Zahlengröße ist,

arc. sin. ((a)) oder arc. tang. ((a))

irgend einen der Bogen bezeichnen, welche die Zahlengröße a zum Sinus oder zur Tangente haben, während die gewöhnliche Bezeichnung nur denjenigen unter diesen Bogen anzeigt, welcher den kleinsten Zahlenwerth hat.

Mit Hülfe dieser angenommenen Bezeichnungsarten wird man jedem Mißverständnisse vorbeugen, welches die Anwendung der Zeichen, deren Werth nicht ganz genau bestimmt worden wäre, zur Folge haben könnte. Um in dieser Beziehung jede Schwierigkeit zu beseitigen, will ich hier die Bezeichnungen aufzählen, von welchen wir Gebrauch machen werden, um die Resultate der algebraischen oder trigonometrischen Operationen auszudrücken.

Die Summe zweier Zahlengrößen wird gewöhnlich durch das Nebeneinanderstellen dieser beiden Zahlengrößen angedeutet werden, deren jede durch einen mit dem Zeichen + oder — behafteten Buchstaben ausgedrückt wird, und man wird nur das Zeichen +, wenn es vor dem ersten Buchstaben steht, weglassen können.

Demnach wird

$$+ a + b \text{ oder } a + b$$

die Summe der beiden Zahlengrößen + a und + b und

$$+ a - b \text{ oder schlechthin } a - b$$

die Summe der beiden Zahlengrößen + a und — b, welche der Differenz der beiden Zahlengrößen + a und + b gleich ist, bezeichnen.

Die Gleichheit der beiden Zahlengrößen a und b wird durch das zwischen beide gesetzte Zeichen = angedeutet werden, also durch

$$a = b,$$

und wenn die erstere die zweite übersteigt, d. h. wenn die Differenz a — b positiv ist, so wird dies durch die Bezeichnung

$$a > b \text{ oder } b < a$$

ausgedrückt werden.

Wir werden außerdem gewöhnlich durch

$$+ a \times + b \text{ oder bloß durch } a.b \text{ oder } ab$$

das Product der beiden Zahlengrößen + a, + b, und durch

$$\frac{a}{b} \text{ oder } a : b$$

ihren Quotienten bezeichnen.

Es seien nun m und n zwei ganze Zahlen, A eine beliebige Zahl, und a, b zwei beliebige, positive oder negative, Zahlengrößen, so werden

$$A^{m}, A^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A}, A^{\pm\frac{m}{n}}, A^{b}$$

die positiven Zahlengrößen darstellen, welche man erhält, indem man die Zahl A auf die Potenzen erhebt, welche respective bezeichnet werden durch die Exponenten

$$m, \frac{1}{n}, \pm\frac{m}{n}, b;$$

und

$$a^{\pm m}$$

die positive oder negative Größe, welche man durch Erhebung der Größe a auf die Potenz ±m erhält. Was die Bezeichnungen

$$((a))^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, ((a))^{\frac{m}{n}}$$

anlangt, so werden wir uns ihrer nicht allein bedienen, um die positiven oder negativen Werthe der durch die Exponenten

$$\frac{1}{n}, \pm\frac{m}{n}$$

angedeuteten Potenzen der Größe a, wenn es dergleichen giebt, zu bezeichnen, sondern wir schließen auch die imaginären Werthe derselben Potenzen mit ein. (Siehe weiter unten Cap. VII., was man unter imaginären Ausdrücken versteht.)

Es verdient bemerkt zu werden, daß, wenn man durch A den Zahlenwerth von a bezeichnet und den Bruch $\frac{m}{n}$ auf seine kleinste Benennung reducirt hat, die Potenz

$$((a))^{\pm\frac{m}{n}}$$

einen einzigen reellen positiven oder negativen Werth, nämlich

$$+A^{\pm\frac{m}{n}} \text{ oder } -A^{\pm\frac{m}{n}}$$

haben wird, wenn $\frac{m}{n}$ ein Bruch ist, dessen Nenner ein ungerade Zahl ist, während sie beide ebenerwähnte reelle Werthe oder gar keinen hat, wenn der Nenner von $\frac{m}{n}$ eine gerade Zahl ist.

In dem besondern Falle, wo a positiv ist, und $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, hat der Ausdruck $((a))^{\frac{m}{n}}$ nur zwei Werthe, welche beide reell sind und durch die Formel (2), oder, was auf dasselbe hinausläuft, durch die Formel (1) angegeben werden.

Die Bezeichnungen

$$l(B),\ L(B),\ L'(B),\ \ldots.$$

werden die reellen Logarithmen der Zahl B in verschiedenen Systemen andeuten, während jede der folgenden

$$l((B)),\ L((B)),\ L'((B)),\ \ldots.$$

dazu dienen kann, außer dem reellen Logarithmus der Zahl B, wenn es einen solchen gibt, irgend einen der imaginären Logarithmen derselben Größe zu bezeichnen. (S. Cap. IX. was unter imaginären Logarithmen verstanden wird.)

In der Trigonometrie sollen

sin. a, cos. a, tang. a, cot. a, sec. a, cosec. a,
sinv. a, cosinv. a

respective den Sinus, den Cosinus, die Tangente, die Cotangente, die Secante, die Cosecante, den Sinusversus und den Cosinusversus des Bogens a ausdrücken, und die Bezeichnungen

arc. sin. ((a)), arc. cos. ((a)), arc. tang. ((a)), arc. cot. ((a)),
arc. sec. ((a)), arc. cosec. ((a))

sollen irgend einen der Bogen andeuten, welche die Größe a zum Sinus oder Cosinus, zur Tangente oder Cotangente, zur Secante oder Cosecante haben. Wir werden uns der einfachen Bezeichnungen

arc. sin. (a), arc. cos. (a), arc. tang. (a), arc. cot. (a), arc. sec. (a), arc. cosec. (a)

bedienen, oder, mit Weglassung aller Parenthesen der folgenden

arc. sin. a, arc. cos. a, arc. tang. a, arc. cot. a, arc. sec. a, arc. cosec. a,

wenn wir unter den Bogen, von welchen eine trigonometrische Linie (Function) a ist, denjenigen bezeichnen wollen, welcher den kleinsten Zahlenwerth hat; und wenn diese Bogen paarweise gleich, aber von entgegengesetzten Zeichen sind, denjenigen welcher den kleinsten positiven Werth hat. Es werden folglich

arc. sin. a, arc. tang. a, arc. cot. a, arc. cosec. a

positive oder negative Bogen, zwischen den Grenzen

$$-\frac{\pi}{2} \text{ und } +\frac{\pi}{2},$$

wo π die halbe Peripherie des Kreises, dessen Radius Eins ist, bezeichnet, während

arc. cos. a, arc. sec. a

die positiven Bogen andeuten, welche zwischen den Grenzen 0 und π liegen.

Hat man die eben aufgestellten Bezeichnungen einmal angenommen, so wird man offenbar, wenn man unter k sich eine beliebige ganze Zahl denkt, für irgendwelche positive oder negative Werthe der Größe a erhalten.

$$(3)\quad \begin{cases} \text{arc. sin. } ((a)) = \frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc. sin. } a\right) \pm 2k\pi, \\ \text{arc. cos. } ((a)) = \pm \text{ arc. cos. } a \pm 2k\pi, \\ \text{arc. tang. } ((a)) = \text{arc. tang. } a \pm 2k\pi, \\ \text{arc. cos. } a + \text{arc. sin. } a = \frac{\pi}{2}, \\ \text{arc. cosec. } a + \text{arc. sec. } a = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Man wird aber noch außerdem für positive Werthe von a finden,

$$(4) \quad \text{arc. cot. a} + \text{arc. tang. a} = \frac{\pi}{2},$$

und für negative Werthe von a

$$(5) \quad \text{arc. cot. a} + \text{arc. tang. a} = -\frac{\pi}{2}.$$

Wenn eine variable Größe gegen eine bestimmte Grenze hin convergirt, so ist es oft nützlich, diese Grenze durch eine besondere Bezeichnung anzudeuten; dies werden wir thun, indem wir die Abkürzung

$$\text{lim. (limes, Grenze)}$$

der variablen Größe, von welcher die Rede ist, vorsetzen. Defters convergirt, während eine oder mehrere variable Größen bestimmten Grenzen sich nähern, ein Ausdruck, welcher diese variablen Größen enthält, zu gleicher Zeit gegen mehrere, von einander verschiedene, Grenzen. Wir werden alsdann irgend eine dieser letztern Grenzen vermittelst doppelter, auf die Abkürzung lim. folgender Parenthesen andeuten, so, daß der Ausdruck, welchen wir betrachten, durch dieselben eingeschlossen wird. Wir wollen annehmen, um die Sache durch ein Beispiel zu erläutern, daß eine variable positive oder negative Größe, die wir durch x bezeichnen wollen, sich der Grenze 0 nähere; unter A dagegen wollen wir eine constante Zahl verstehen: so wird es leicht sein, sich zu überzeugen, daß jeder der Ausdrücke

$$\text{lim.}\,(A^x), \quad \text{lim.}\,(\sin. x)$$

einen durch die Gleichung

$$\text{lim.}\,(A^x) = 1,$$

$$\text{oder lim.}\,(\sin. x) = 0,$$

bestimmten Werth hat, während der Ausdruck

$$\text{lim.}\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

zwei Werthe zuläßt, nämlich $+\infty$ und $-\infty$, und

$$\text{lim.}\left(\left(\sin.\frac{1}{x}.\right)\right)$$

eine unendliche Anzahl von Werthen, welche zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegen.

Wir beschließen diese Vorerinnerungen mit einigen Lehrsätzen über die mittleren Größen, deren Kenntniß uns in der Folge sehr nützlich sein wird.

Mittel zwischen mehreren gegebenen Größen nennt man eine neue, zwischen der kleinsten und größten derselben liegende Größe.

Nach dieser Erklärung ist es einleuchtend, daß es eine unendliche Menge von Mitteln zwischen mehreren ungleichen Größen gibt, und daß das Mittel zwischen mehreren gleichen Größen jeder derselben gleich ist. Hiernach wird man leicht, wie man aus der zweiten Note ersehen kann, folgende Sätze aufstellen können.

Lehrsatz 1. Es seien $b, b', b'', b''' \ldots$ mehrere Größen mit einerlei Zeichen, und ihre Anzahl n; $a, a', a'' \ldots$ seien irgendwelche Größen, ihre Anzahl aber der der Erstern gleich, so drückt der Bruch

$$\frac{a + a' + a'' + \text{etc.} \ldots}{b + b' + b'' + \text{etc.} \ldots}$$

das Mittel zwischen

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \text{etc.} \ldots \text{ aus.}$$

Zusatz. Setzt man

$$b = b' = b'' \ldots = 1,$$

so ergiebt sich aus dem vorhergehenden Lehrsatze, daß die Größe

$$\frac{a + a' + a'' + \text{etc.} \ldots}{n}$$

das Mittel ist zwischen

$$a + a' + a'' + \text{etc.} \ldots$$

Diese besondere Art von Mitteln nennt man gewöhnlich das arithmetische Mittel.

Lehrsatz 2. Es seien $A, A', A'' \ldots$; $B, B', B'' \ldots$ zwei Reihen von willkürlich angenommenen Zahlen. Wir wollen nun mit diesen beiden Reihen, deren jede n Glieder enthalten mag, die Wurzelgrößen

$\sqrt[B]{A}, \sqrt[B']{A'}, \sqrt[B'']{A''}$, etc. ....

bilden, so wird

$\sqrt[B+B'+B''\ldots]{A\ A'\ A'' \ldots\ldots}$ eine neue mittlere Wurzelgröße zwischen allen übrigen sein.

Zusatz. Setzt man

$$B = B' = B'' \ldots = 1,$$

so wird man finden, daß die positive Größe

$$\sqrt[n]{A\ A'\ A'' \ldots}$$

das Mittel zwischen A, A′, A″ .... ist.
Dieses Mittel pflegt man das geometrische Mittel zu nennen.

Lehrsatz 3. Wenn unter den im 1sten Lehrsatze gemachten Voraussetzungen überdies $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$. andere Größen von einerlei Zeichen bedeuten, so wird der Bruch

$$\frac{\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \text{etc.} \ldots}{\alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b'' + \text{etc.} \ldots}$$

das Mittel sein zwischen

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''} \text{ etc.} \ldots$$

Zusatz. Setzt man

$$b = b' = b'' \ldots = 1,$$

so folgt aus dem vorhergehenden Zusatze, daß die Summe

$$\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \text{etc.} \ldots.$$

gleich ist dem Producte von

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \text{etc.} \ldots.$$

und eines Mittels zwischen den Größen

$$a, a', a'', \text{etc.} \ldots.$$

Wenn wir ein Mittel zwischen mehreren Größen a, a′, a″ ... andeuten wollen, so werden wir uns der Kürze wegen der Bezeichnung

$$M(a, a', a'' \ldots)$$

bedienen. Hiernach lassen sich die vorhergehenden Lehrsätze nebst ihren Zusätzen in folgende Formeln zusammenziehen

$$(6)\quad \frac{a + a' + a'' + \text{etc.} \ldots}{b + b' + b'' + \text{etc.} \ldots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''} \ldots\right)$$

$$(7)\quad \frac{a + a' + a'' + \text{etc.} \ldots}{n} = M(a, a', a'' \ldots)$$

$$(8)\quad \sqrt[n]{\frac{B+B'+B'' \ldots}{A\ A'\ A'' \ldots}} = M\left(\sqrt[n]{\frac{B}{A}}, \sqrt[n]{\frac{B'}{A'}}, \sqrt[n]{\frac{B''}{A''}} \ldots\right)$$

$$(9)\quad \sqrt[n]{A\ A'\ A'' \ldots} = M(A, A', A'' \ldots)$$

$$(10)\quad \frac{a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots}{b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' + \ldots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''} \ldots\right)$$

$$(11)\quad a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots = (a + a' + a'' \ldots)\, M(a, a', a'' \ldots)$$

In diesen Formeln drücken

$$a, a', a'' \ldots; \quad b, b', b'' \ldots; \quad \alpha, \alpha' \alpha'' \ldots$$

drei Reihen von Größen, und

$$A, A', A'' \ldots; \quad B, B', B'' \ldots$$

zwei Reihen von Zahlen aus, deren jede aus n verschiedenen Gliedern besteht. Die dritte Reihe besteht, gleich der zweiten, aus lauter Größen von gleichem Zeichen.

Die von uns so eben angenommene Bezeichnungsart setzt uns in den Stand, auszudrücken, daß eine Größe zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt. Da nämlich jede zwischen den Grenzen a, b liegende Größe ein Mittel zwischen eben diesen Grenzen ist, so wird man sie durch

$$M(a, b)$$

bezeichnen können.

So wird z. B. jede positive Größe durch $M(0, \infty)$, jede negative Größe durch $M(0, -\infty)$, und jede reelle Größe durch $M(+\infty, -\infty)$ bezeichnet werden.

So oft wir, ohne Unterschied, irgend eine der zwischen den Grenzen a, b liegenden Größen andeuten wollen, werden wir die Parenthesen verdoppeln und schreiben

$$M((a, b)).$$

Wenn man z. B. annimmt, daß die Veränderliche x sich der Null nähert, so wird man haben

$$\lim. \left(\left(\sin. \frac{1}{x}\right)\right) = M((-1, +1));$$

wobei, wohlverstanden, der Ausdruck $\lim. \left(\left(\sin. \frac{1}{x}\right)\right)$ eine unendliche Menge von Werthen, welche zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegen, zuläßt.

Erster Theil.

Algebraische Analysis.

Erstes Capitel.

Von den reellen Functionen.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die Functionen.

Wenn variable Größen dergestalt mit einander verbunden sind, daß man aus jedem der einen von ihnen beigelegten Werthe die Werthe aller übrigen ableiten kann, so sieht man diese verschiedenen Größen als durch die eine von ihnen ausgedrückt an, welche letztere alsdann die unabhängige Veränderliche genannt wird; und die andern Größen, welche vermittelst der unabhängigen Veränderlichen ausgedrückt werden, heißen dann Functionen dieser Veränderlichen.

Wenn variable Größen dergestalt unter einander verbunden sind, daß, wenn einigen von ihnen Werthe beigelegt werden, man aus diesen die Werthe aller übrigen herleiten kann, so sieht man diese verschiedenen Größen als durch mehrere von ihnen ausgedrückte, welche letzteren den Namen unabhängige Veränderliche führen, an. Die übrigen Größen, welche vermittelst der unabhängigen Veränderlichen ausgedrückt werden, heißen dann Functionen eben dieser Veränderlichen.

Die verschiedenen Ausdrücke, welche die Algebra und die Trigonometrie darbieten, sind, wenn sie, als unabhängig angesehene, Veränderliche enthalten, eben so viele Functionen eben dieser Veränderlichen. So z. B. sind

$$L(x),\ \sin. x,\ \text{etc.} \ldots.$$

Functionen der Veränderlichen x;

$$x + y,\ x^y,\ x\,y\,z,\ \text{etc.} \ldots.$$

Functionen der Veränderlichen x, y, oder x, y, z, etc....

Wenn Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen vorkommen, welche, wie dies in den vorhergehenden Beispielen der Fall ist, unmittelbar durch eben diese Veränderlichen ausgedrückt werden, so werden sie entwickelte Functionen genannt. Wenn uns aber bloß die zwischen den Functionen und den Veränderlichen stattfindenden Relationen (Beziehungen) gegeben werden, d. h. die Gleichungen, welchen diese Größen Genüge leisten sollen, während diese Gleichungen nicht algebraisch aufgelöst sind, indem die Functionen nicht unmittelbar mittelst der Veränderlichen ausgedrückt werden, so heißen sie verwickelte Functionen. Wenn z. B. y eine verwickelte Function von x ist, bestimmt durch die Gleichung

$$L(y) = x,$$

und wenn man die Basis (Grundzahl) des Logarithmensystems, mit welchem man es zu thun hat, A nennt, so wird

$$y = A^x$$

dieselbe, durch die Auflösung der gegebenen Gleichung entwickelte, Function sein.

Wenn man eine entwickelte Function einer einzigen Veränderlichen x, oder mehrerer Veränderlichen x, y, z .... bezeichnen will, ohne die Natur dieser Function zu bestimmen, so bedient man sich der Bezeichnungen

$$f(x),\ F(x),\ \varphi(x),\ \chi(x),\ \psi(x), \ldots\ldots$$

$$f(x, y, z \ldots),\ F(x, y, z \ldots),\ \varphi(x, y, z \ldots),\ \text{etc.}\ldots.$$

Wenn eine Function einer einzigen Veränderlichen völlig bestimmt sein soll, so ist es nothwendig, aber auch hinreichend, daß man aus jedem besondern, der Veränderlichen beigelegten

Werthe den ihm entsprechenden Werth der Function herleiten könne. Oft erhält für jeden Werth der Veränderlichen die gegebene Function ihrer mehrere, von einander verschiedene. Den in den Vorerinnerungen eingeführten Bezeichnungsarten gemäß werden wir gemeinhin diese vielfachen Werthe einer Function durch Bezeichnungen andeuten, bei welchen die Veränderliche in doppelten Klammern oder Parenthesen eingeschlossen sein wird. So wird z. B.

$$\text{arc. sin. } ((x))$$

irgend einen der Bogen, deren Sinus x ist, bezeichnen,

$$W x = \pm V x$$

irgend eine der beiden Quadratwurzeln der als positiv vorauszusetzenden Veränderlichen x sein.

§. 2. Von den einfachen Functionen.

Man nennt diejenigen Functionen einer Veränderlichen x, welche das Resultat einer einzigen, mit dieser Veränderlichen vorgenommenen Operation sind, einfache Functionen. Die Anzahl der einfachen Functionen, welche man gewöhnlich in der Analysis betrachtet, ist sehr klein, und sie gehören theils der Algebra, theils der Trigonometrie an. Die der Algebra angehörenden einfachen Functionen entspringen aus der Addition, Subtraction, Multiplication, Division, dem Potenziren, dem Wurzelausziehen, oder sie beruhen auf Exponentialgrößen und Logarithmen. Denkt man sich demnach unter A eine constante Zahl, und unter $a = \pm A$ eine constante Größe, so werden die einfachen algebraischen Functionen der Veränderlichen x folgende sein:

$$a + x,\ a - x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ x^a,\ A^x,\ L(x).$$

Wir führen die Wurzeln deshalb nicht an, weil sie sich immer auf die Potenzen zurückführen lassen. — Was die einfachen Functionen anlangt, welche der Trigonometrie angehören, und die Bogen, welche eben diesen Linien (Functionen) entsprechen,

so könnte man eine große Anzahl derselben angeben, wenn man alle trigonometrischen Linien nebst den ihnen entsprechenden Bogen zu den einfachen Functionen zählen wollte; wir werden sie aber auf folgende vier reduciren:

sin. x, cos. x, arc. sin. x, arc. cos. x;

und die andern trigonometrischen Linien tang. x, sec. x, ... nebst den ihnen entsprechenden Bogen arc. tang. x, arc. sec. x, ... zu den zusammengesetzten Functionen rechnen; indem diese zuletzt genannten Linien immer durch den Sinus und Cosinus ausgedrückt werden können. Wir würden sogar, streng genommen, die beiden einfachen Functionen sin. x und cos. x auf eine einzige reduciren können, da zwischen ihnen die Gleichung $\sin. x^2 + \cos. x^2 = 1$ stattfindet; aber diese Functionen werden so häufig angewandt, daß es von Nutzen sein wird, sie beide beim Calcul als einfache Functionen beizubehalten.

§. 3. Von den zusammengesetzten Functionen.

Functionen, welche sich mit Hülfe mehrerer Operationen aus einer variablen Größe herleiten lassen, heißen zusammengesetzte Functionen, und man unterscheidet unter diesen letztern noch die Functionen von Functionen, welche das Resultat mehrerer successiven Operationen sind, von welchen die erste mit der Veränderlichen, jede folgende mit dem Resultate der zunächst vorhergehenden Operation vorgenommen wird. Dieser Definition zufolge sind

$$x^x, \sqrt[x]{x}, \frac{lx}{x} \text{ etc. ....}$$

zusammengesetzte Functionen der Veränderlichen x, und

$$l(\sin. x), l(\cos. x), \text{ etc. ....}$$

Functionen von Functionen, deren jede das Resultat von zwei successiven Operationen ist.

Die zusammengesetzten Functionen unterscheiden sich gegenseitig von einander durch die Natur der Operationen, durch welche

sie entstehen. Diejenigen, welche durch successive algebraische Operationen entstehen, dürften wohl eigentlich alle algebraische Functionen zu nennen sein; man versteht jedoch unter algebraischen Functionen vorzugsweise diejenigen, welche man erhält, wenn man nichts weiter als die ersten algebraischen Operationen anwendet, nämlich die Addition, Subtraction, Multiplication, Division und endlich das Potenziren. Sobald aber eine Function variable Exponenten oder Logarithmen enthält; wird sie eine exponentielle oder logarithmische genannt.

Die algebraischen Functionen zerfallen in rationale und irrationale Functionen. Rational sind diejenigen, in welchen die Veränderliche nur auf ganze Potenzen erhoben vorkommt. Man nennt insbesondre jedes Polynom, welches nur ganze Potenzen der Veränderlichen enthält, eine ganze Function, wie z. B. $a + bx + cx^2 +$ etc. ....; und eine gebrochene Function den Quotienten zweier solchen Polynomien.

Der Grad einer ganzen Function von x ist der Exponent der höchsten Potenz von x, welche in dieser Function vorkommt.

Die ganze Function vom ersten Grade, nämlich

$$a + bx$$

heißt auch lineäre Function, weil man sich, bei der Anwendung auf die Geometrie, ihrer bedient, um die Ordinate einer geraden Linie auszudrücken. Jede ganze oder gebrochene Function ist als solche rational, jede andere algebraische Function irrational.

Die Functionen, welche aus den Operationen der Trigonometrie entspringen, werden durch den Namen trigonometrische Functionen oder Kreisfunctionen bezeichnet. Die verschiedenen Benennungen, welche so eben den zusammengesetzten Functionen mit einer Veränderlichen beigelegt worden sind, werden auf gleiche Weise den Functionen mit mehreren Veränderlichen beigelegt, wenn diese letztern Functionen, in Beziehung auf jede der in ihnen enthaltenen variablen Größen, die Eigenschaften besitzen, welche jene Namen voraussetzen. — So

wird z. B. jedes Polynom, welches nur ganze Potenzen der Veränderlichen x, y, z . . . enthält, eine ganze Function dieser Veränderlichen sein. Man versteht unter dem Grade dieser Function die Summe der Exponenten der Veränderlichen in demjenigen Gliede, in welchem diese Summe die größte ist. Eine ganze Function des ersten Grades, wie z. B.

$$a + bx + cy + dz + \text{etc.} \ldots,$$

erhält auch hier den Namen lineare Function.

Zweites Capitel.

Von den Größen, welche entweder unendlich klein oder unendlich groß sind, und von der Stetigkeit der Functionen. — Besonders merkwürdige Werthe der Functionen in einzelnen Fällen.

§. 1. Vom unendlich Kleinen und unendlich Großen.

Man sagt: „eine Größe wird unendlich klein", wenn ihr Zahlenwerth bis ins Unendliche abnimmt, so daß er sich der Grenze Null nähert. Es muß aber hier bemerkt werden, daß man ein beständiges Abnehmen nicht mit diesem Abnehmen bis ins Unendliche verwechseln muß. Der Flächeninhalt eines um einen gegebenen Kreis beschriebenen Vielecks nimmt beständig in eben dem Maße ab, in welchem die Seitenzahl zunimmt, aber nicht bis ins Unendliche, da sie die Kreisfläche zur Grenze hat. Eben so würde eine variable Größe, deren successive Werthe sich auf die verschiedenen Glieder der bis ins Unendliche fortgesetzten Reihe

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \text{etc.}\ldots.$$

beschränkten, zwar beständig, aber nicht bis ins Unendliche abnehmen, da ihre successiven Werthe sich der Grenze 1 nähern. Dagegen würde eine Veränderliche, deren successive Werthe sich auf die verschiedenen Glieder der bis ins Unendliche fortgesetzten Reihe

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{7},\ \text{etc.}\ldots.$$

beschränkten, nicht beständig abnehmen, weil die Differenz zwi-

schen zweien aufeinanderfolgenden Gliedern dieser Reihe abwechselnd positiv und negativ ist; nichts destoweniger nähme sie fortgesetzt bis ins Unendliche ab, da die Werthe der Glieder zuletzt kleiner als jede anzugebende Größe würden.

Man sagt: „eine variable Größe wird unendlich groß" wenn ihr Zahlenwerth bis ins Unendliche wächst, so daß sie sich der Grenze ∞ nähert. Es ist, wohl zu merken, ein wesentlicher Unterschied zwischen einer Veränderlichen, welche bis ins Unendliche wächst, und einer andern, welche beständig wächst. Der Flächeninhalt eines in einem gegebenen Kreise eingeschriebenen regulären Vielecks wächst beständig (aber nicht bis ins Unendliche), in dem Maße, in welchem die Seitenzahl zunimmt. Die Glieder der natürlichen Reihe der ganzen Zahlen

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \text{etc.} \ldots$$

wachsen beständig und bis ins Unendliche.

Die unendlich kleinen und unendlich großen Zahlengrößen haben verschiedene Eigenschaften, aus welchen sich wichtige Sätze herleiten lassen, und welche ich mit wenigen Worten auseinandersetzen will.

Es sei α eine unendlich kleine Größe, d. h. eine Veränderliche, deren Zahlenwerth bis ins Unendliche abnehmen soll. Wenn man die verschiedenen ganzen Potenzen von α also

$$\alpha, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \text{etc.} \ldots.$$

in eine und dieselbe Rechnung einführt, so werden diese verschiedenen Potenzen respective unendlich kleine Größen der ersten, zweiten, dritten .... Ordnung genannt.

Man nennt im Allgemeinen jede Größe, deren Verhältniß zu α sich einer endlichen, von 0 verschiedenen Grenze nähert, wenn der Zahlenwerth von α abnimmt, ein unendlich Kleines der ersten Ordnung; jede variable Größe, deren Verhältniß zu α^2 sich einer endlichen, von 0 verschiedenen Grenze nähert, wenn etc. .... — Wenn man demnach unter k eine endliche, von Null verschiedene Größe versteht, und unter ε eine variable Zahl, welche zugleich mit dem Zahlenwerthe von α abnimmt, so wird die allgemeine Form der unendlich kleinen Größen von der ersten Ordnung

$k\alpha$ oder doch wenigstens $k\alpha\,(1 \pm \varepsilon)$
sein; die allgemeine Form der unendlich kleinen Größen von der 2ten Ordnung

$k\alpha^2$ oder doch wenigstens $k\alpha^2\,(1 \pm \varepsilon)$,

etc. ....

endlich die allgemeine Form der unendlich kleinen Größen von der Ordnung n (wo unter n eine ganze Zahl zu verstehen ist)

$k\alpha^n$ oder doch wenigstens $k\alpha^n\,(1 \pm \varepsilon)$.

Es lassen sich in Beziehung auf diese verschiedenen Ordnungen unendlich kleiner Größen ohne Mühe folgende Sätze entwickeln.

Lehrsatz 1. Wenn man zwei unendlich kleine Größen von verschiedenen Ordnungen mit einander vergleicht, so wird, während beide der Grenze Null sich nähern, die der höchsten Ordnung fortwährend den kleinsten Werth haben.

Beweis. Es seien

$$k\alpha^n\,(1 \pm \varepsilon),\quad k'\alpha^{n'}\,(1 \pm \varepsilon')$$

zwei unendlich kleine Größen, die eine von der Ordnung n, die andere von der Ordnung n', es sei ferner $n' > n$; so wird das Verhältniß der ersten zur zweiten, also

$$\frac{k'}{k}\,\alpha^{n'-n}\cdot\frac{1 \pm \varepsilon'}{1 \pm \varepsilon},$$

mit α zugleich bis ins Unendliche sich der Grenze Null nähern; was nur der Fall sein kann, wenn der Zahlenwerth der zweiten beständig kleiner als der der ersten Größe ist.

Lehrsatz 2. Ein unendlich Kleines von der Ordnung n, d. h. von der Form $k\alpha^n\,(1 \pm \varepsilon)$, ändert zugleich mit α sein Zeichen, so oft n eine ungerade Zahl ist, und behält, bei sehr kleinen Zahlenwerthen von ε, einerlei Zeichen mit k, wenn n eine gerade Zahl ist.

Beweis. Im ersten Falle hat in der That α^n mit α einerlei Zeichen, und im zweiten ist α^n immer positiv; das Zeichen des Productes $k\,(1 \pm \varepsilon)$ aber ist, wenn ε sehr klein ist, das von k.

Lehrsatz 3. Die Summe mehrerer unendlich kleinen Größen von den Ordnungen n, n′, n″, ... (wo n′, n″, ... größere Zahlen als n bedeuten) ist ein unendlich Kleines von der Ordnung n.

Beweis.

$$k\alpha^n(1 \pm \varepsilon) + k'\alpha^{n'}(1 \pm \varepsilon') + k''\alpha^{n''}(1 \pm \varepsilon'') + \ldots$$
$$= ka^n\left[1 \pm \varepsilon + \frac{k'}{k} \cdot \alpha^{n'-n}(1 \pm \varepsilon') + \frac{k''}{k}\alpha^{n''-n}(1 \pm \varepsilon'') + \text{etc.}\ldots\right]$$
$$= k\,a^n\,(1 \pm \varepsilon,),$$

wo ε, eine Zahl ist, welche zugleich mit α sich der Grenze Null nähert. Aus den so eben vorgetragenen Principien lassen sich, wie sogleich gezeigt werden wird, mehrere wichtige Sätze herleiten, welche sich auf Polynomien beziehen, die nach den aufsteigenden Potenzen einer unendlich kleinen Größe α geordnet sind.

Lehrsatz 4. Jedes nach den aufsteigenden Potenzen von α geordnete Polynom, z. B.

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \text{etc.} \ldots.$$

oder allgemeiner

$$a\alpha^n + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \text{etc.} \ldots.$$

(wo die Zahlen n, n′, n″ ... eine divergirende Reihe bilden), muß, für sehr kleine Werthe von α, beständig einerlei Zeichen mit ihrem ersten Gliede a oder $a\alpha^n$ haben.

Beweis. Die Summe des zweiten und aller folgenden Glieder ist in der That im ersten Falle ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung, dessen Werth kleiner als a ist, und im zweiten Falle ein unendlich Kleines von der Ordnung n′, dessen Werth beständig kleiner ist, als der eines unendlich Kleinen von der Ordnung n.

Lehrsatz 5. Wenn in dem nach den aufsteigenden Potenzen von α geordneten Polynom

$$a\alpha^n + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \text{etc.}\ldots.$$

der Grad n′ des zweiten Gliedes eine ungerade Zahl ist, so ist dieses Polynom, für sehr kleine Werthe von α, bald größer bald kleiner als sein erstes

Glied $a\alpha^n$, je nachdem die variable Größe α und der Coefficient b einerlei Zeichen oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Beweis. In dem angenommenen Falle wird in der That die Summe der Glieder, welche auf das erste folgen, also

$$b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \text{etc.}\ldots.$$

für sehr kleine Werthe von α das Zeichen der beiden Producte $b\alpha^{n'}$, $b\alpha$ haben.

Lehrsatz 6. Wenn in dem nach den aufsteigenden Potenzen von α geordneten Polynom

$$a\alpha^n + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \text{etc.}\ldots.$$

n' eine gerade Zahl ist, so wird dieses Polynom, für sehr kleine Werthe von α, beständig größer als sein erstes Glied, so oft b positiv ist, und beständig kleiner, so oft b negativ ist.

Beweis. In der That hat in dem angenommenen Falle die Summe der Glieder, welche auf das erste folgen, das Zeichen von $b\alpha^{n'}$, folglich von b.

Zusatz. Wenn man in dem vorhergehenden Lehrsatze $n = o$ setzt, so wird man folgenden Satz erhalten:

Lehrsatz 7. Wenn in dem, nach den aufsteigenden Potenzen von α geordneten, Polynom

$$a + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \text{etc.}\ldots.$$

n' eine gerade Zahl ist, so wird unter den Werthen dieses Polynoms, welche unendlich kleinen Werthen von α entsprechen, derjenige, welcher $\alpha = o$ entspricht, immer der kleinste sein, so oft b positiv, der größte dagegen, so oft b negativ ist.

Dieser besondere Werth des Polynoms, größer oder kleiner als alle benachbarten Werthe, wird ein Maximum oder Minimum genannt.

Aus den Eigenschaften der unendlich kleinen Größen, welche uns gegenwärtig bekannt sind, lassen sich die analogen Eigenschaften der unendlich großen Größen ableiten; denn es darf nur bemerkt werden, daß jede variable Größe dieser letztern Art durch

$\frac{1}{\alpha}$ bezeichnet werden kann, wenn α ein unendlich Kleines ist. So wird z. B., wenn man in dem nach den absteigenden Potenzen der Veränderlichen x geordneten Polynom

$$a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \text{etc.} \ldots + h x + k$$

dieser Veränderlichen immer größere und größere Werthe [illegible] dieselbe zuletzt unendlich groß; bringt man sie unter[illegible] $\frac{1}{\alpha}$, so reducirt sich das Polynom auf

$$\frac{\alpha}{\alpha^m}\left[1 + \frac{b}{a}\alpha + \frac{c}{a}\alpha^2 + \ldots + \frac{h}{\alpha}\right.$$

und man sieht sofort ein, daß für sehr kleine [illegible] oder, was dasselbe ist, für sehr große Werthe [illegible] Polynom mit seinem ersten Gliede

$$\frac{a}{\alpha^m} = a x^m$$

einerlei Zeichen hat.

Da dieses auch dann selbst der Fall ist, wenn einige der Größen b, c, ... h, k gleich Null werden, so folgt, daß man den nachfolgenden Lehrsatz aufstellen kann.

Lehrsatz 8. Wenn man in einem nach den absteigenden Potenzen der Veränderlichen x geordneten Polynom, den Zahlenwerth dieser Veränderlichen bis ins Unendliche zunehmen läßt, so muß zuletzt das Polynom einerlei Zeichen mit seinem ersten Gliede haben.

§. 2. Von der Stetigkeit der Functionen.

Unsere Vorstellungen Hinsichts der Continuität oder Discontinuität (Stetigkeit oder Unstetigkeit) der Functionen gehören mit zu dem, was sich an die Betrachtung der unendlich kleinen Größen anknüpft. Wir wollen zuvörderst aus diesem Gesichtspuncte die Functionen einer einzigen Veränderlichen betrachten.

Es sei f (x) eine Function der Veränderlichen x, und wir wollen annehmen, daß diese Function für jeden, zwischen zwei gegebenen Grenzen liegenden Werth von x beständig nur einen, und zwar einen endlichen Werth zulasse. Wenn man,

****
!
Vom: 12.04
Name Zweigs
Benutzernu

von einem zwischen diesen Grenzen liegenden Werthe von x ausgehend, die Veränderliche um ein unendlich Kleines α wachsen läßt, so wird die Function selbst um die Differenz

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

wachsen, welche zugleich von der neuen Veränderlichen α und von dem Werthe von x abhängt. Die Function f (x) wird demnach, zwischen den beiden Grenzen von x, eine continuirliche Function dieser Veränderlichen sein, wenn der Werth der Differenz

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

für jeden zwischen diesen Grenzen liegenden Werth von x zugleich mit dem von α bis ins Unendliche abnimmt, oder mit andern Worten:

die Function f (x) wird in Beziehung auf x (Letzteres zwischen gegebenen Grenzen gedacht) continuirlich sein, wenn zwischen diesen ein unendlich kleiner Zuwachs der Veränderlichen stets einen unendlich kleinen Zuwachs der Function selbst zur Folge hat.

Man sagt auch: „die Function f (x) ist in der Nähe eines der Veränderlichen x beigelegten besondern Werthes continuirlich", so oft sie es zwischen zwei, selbst sehr nahe an einander liegenden Grenzen von x ist, zwischen welchen der in Rede stehende Werth liegt.

Wenn endlich eine Function f (x) in der Nähe eines besondern Werthes der Veränderlichen x continuirlich zu sein aufhört, so sagt man: „sie wird discontinuirlich" oder „es findet für diesen besondern Werth ein Aufhören der Continuität oder eine Unterbrechung derselben Statt.

Nach diesen Erklärungen wird es leicht sein, zu erkennen, zwischen welchen Grenzen eine gegebene Function der Veränderlichen x in Beziehung auf diese Veränderliche stetig ist. So wird z. B. die Function sin. x, welche einen, und zwar einen endlichen Werth für jeden besondern Werth der Veränderlichen x zuläßt, zwischen irgend zweien Grenzen dieser Veränderlichen

stetig sein, wenn nur der Werth von sin. $(\frac{1}{2}\alpha)$ und folglich auch der der Differenz

$$\sin.(x+\alpha) - \sin. x = 2 \sin.(\tfrac{1}{2}\alpha).\cos.(x+\tfrac{1}{2}\alpha)$$

bis ins Unendliche zugleich mit α abnimmt, gleichviel übrigens, welchen endlichen Werth man der Größe x gibt. Wenn man im Allgemeinen die elf einfachen Functionen, welche wir oben (Cap. 1. §. 2.) betrachtet haben, nämlich

$$a + x,\ a - x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ x^a,\ A^x,\ Lx$$

$$\sin. x,\ \cos. x,\ \text{arc. sin. } x,\ \text{arc. cos. } x,$$

aus dem Gesichtspuncte der Stetigkeit betrachtet, so wird man finden, daß jede dieser Functionen zwischen zweien endlichen Grenzen der Veränderlichen x stetig bleibt, so oft sie beständig zwischen diesen beiden Grenzen reell und endlich groß bleibt.

Mithin wird jede dieser Functionen in der Nähe eines der Veränderlichen x beigelegten endlichen Werthes stetig sein, wenn dieser Werth

für die Functionen

$\left.\begin{matrix} a+x \\ a-x \\ ax \\ A^x \\ \sin. x \\ \cos. x \end{matrix}\right\}$ zwischen den Grenzen ... $x = -\infty,\ x = +\infty,$

für die Function

$\left.\begin{matrix} \frac{a}{x} \end{matrix}\right\}$ 1) zwischen den Grenzen ... $x = -\infty,\ x = 0$ ...
2) zwischen den Grenzen ... $x = 0,\ x = +\infty,$

für die Function

$\left.\begin{matrix} x^a \\ L(x) \end{matrix}\right\}$ zwischen den Grenzen ... $x = 0,\ x = \infty,$ und

endlich für die Functionen

$\left.\begin{matrix} \text{arc. sin. } x \\ \text{arc. cos. } x \end{matrix}\right\}$ zwischen den Grenzen ... $x = -1,\ x = +1$

liegt.

Es verdient bemerkt zu werden, daß, wenn $a = \pm m$

gesetzt wird (wo m eine ganze Zahl bezeichnet), die einfache Function

$$x^a$$

stets in der Nähe eines endlichen Werthes der Veränderlichen x stetig sein wird, wenn dieser Werth liegt bei $a = +m$, zwischen den Grenzen ... $x = -\infty$, $x = +\infty$

bei $a = -m$ { entweder zwischen den Grenzen ... $x = -\infty$, $x = 0$, oder zwischen ... $x = 0$, $x = +\infty$.

Unter den elf so eben angeführten Functionen werden nur zwei discontinuirlich für einen Werth von x, welcher zwischen den Grenzen liegt, zwischen welchen eben diese Functionen reell bleiben.

Diese beiden Functionen sind:

$$\frac{a}{x} \text{ und } x^a \text{ (wenn } a = -m)$$

Beide werden für $x = 0$ unendlich und folglich discontinuirlich.

Es sei nun

$$f(x, y, z, \ldots)$$

eine Function mehrerer Veränderlichen x, y, z ..., und wir wollen annehmen, daß, in der Nähe der diesen Veränderlichen beigelegten besonderen Werthe X, Y, Z, ..., $f(x, y, z, \ldots)$ eine stetige Function von x, und zugleich von y, von z etc.... sei; so wird man leicht darthun können, daß, wenn man sich unter α, β, γ ... unendlich kleine Größen denkt, und wenn man überdies den Größen x, y, z ... die Werthe X, Y, Z..., oder diesen sehr nahe kommende Werthe beilegt, die Differenz

$$f(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$

ebenfalls unendlich klein sein wird. In der That ist es einleuchtend, daß unter dieser Voraussetzung die Werthe der Differenzen

$$f(x + \alpha, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$

$$f(x + \alpha, y + \beta, z, \ldots) - f(x + \alpha, y, z, \ldots)$$

$$f(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma, \ldots) - f(x + \alpha, y + \beta, z, \ldots)$$

zugleich mit den veränderlichen Größen α, β, γ, ... bis ins Unendliche abnehmen werden, und zwar der Zahlenwerth der ersten

Differenz zugleich mit α, der der zweiten Differenz zugleich mit β, der der dritten zugleich mit γ, u. s. f.

Hieraus kann man nun den Schluß ziehen: daß die Summe aller dieser Differenzen, nämlich

$$f(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$

sich der Grenze Null nähern wird, wenn sich α, β, γ, ... dieser Grenze nähern; oder mit andern Worten:

$$f(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma, \ldots)$$

wird zur Grenze haben

$$f(x, y, z, \ldots).$$

Der eben bewiesene Satz findet offenbar selbst dann Statt, wenn man zwischen den neuen Veränderlichen α, β, γ, ... gewisse Beziehungen annimmt; genug, wenn diesen Beziehungen gemäß die neuen Veränderlichen alle zugleich sich der Grenze Null nähern.

Setzt man in demselben Satze X, Y, Z, ... für x, y, z, ..., und dagegen für $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$, ... x, y, z, ..., so erhält man folgenden Lehrsatz.

Lehrsatz 1. Wenn die Veränderlichen x, y, z, ... die bestimmten Größen X, Y, Z, ... zu ihren respectiven Grenzen haben, und wenn die Function $f(x, y, z, \ldots)$ in Beziehung auf jede der Veränderlichen x, y, z, ... in der Nähe des besondern Systems von Werthen

$$x = X,\ y = Y,\ z = Z, \ldots$$

stetig ist, so hat $f(x, y, z, \ldots)$ zur Grenze

$$f(X, Y, Z, \ldots).$$

Da in diesem Falle die Veränderlichen $x - X$, $y - Y$, $z - Z$, etc. ... an die Stelle von α, β, γ, ... treten, so können, nach dem vorigen Satze, sogar gewisse Beziehungen zwischen den Größen $x - X$, $y - Y$, $z - Z$, ... angenommen werden, und die Function $f(x, y, z, \ldots)$ wird dennoch, auch dann, wenn die Veränderlichen x, y, z, ... gewissen Beziehungen unterworfen wären, $f(X, Y, Z, \ldots)$ zur Grenze haben; wenn nur diese Beziehungen ihnen gestatten, sich den Grenzen X, Y, Z, ... bis ins Unendliche zu nähern.

Es seien, um die Sache durch ein Beispiel deutlicher zu machen, x, y, z, ... Functionen einer und derselben Veränderlichen t, welche wir als unabhängige Veränderliche ansehen wollen, und zwar stetige Functionen in Beziehung auf diese Veränderliche in der Nähe des besondern Werthes

$$t = T,$$

Setzt man, der Bequemlichkeit wegen,

$$f(x, y, z, \ldots) = u,$$

so wird u eine sogenannte zusammengesetzte Function der Veränderlichen t sein, und wenn

$$X, Y, Z, \ldots, U$$

respective diejenigen Größen bezeichnen, in welche

$$x, y, z, \ldots, u$$

übergehen, wenn man $t = T$ setzt, so ist es einerseits einleuchtend, daß einem, dem T sehr nahe liegenden, Werthe von t ein einziger, und zwar ein endlicher Werth von u entsprechen wird; anderseits leuchtet ein, daß die Veränderlichen x, y, z, ... sich den Grenzen X, Y, Z, ..., folglich die Function $f(x, y, z, \ldots) = u$ der Grenze $U = f(X, Y, Z, \ldots)$ nähern wird, wenn man nur t sich der Grenze T nähern läßt. Man würde allgemein auf dieselbe Weise darthun können, daß, wenn man dem t einen sehr nahe an T liegenden Werth gibt, der demselben entsprechende Werth der Function u die Grenze sein wird, welcher diese Function sich unendlich nähert, während t sich dem gegebenen Werthe nähert. Mithin kann man folgenden Lehrsatz aufstellen.

Lehrsatz 2. Wenn

$$x, y, z, \ldots$$

mehrere Functionen der Veränderlichen t, und zwar, in der Nähe des besondern Werthes $t = T$, in Beziehung auf diese Veränderliche continuirliche Functionen sind; wenn überdies

$$X, Y, Z, \ldots$$

die besonderen, dem $t = T$ entsprechenden Werthe von x, y, z, ... sind, und wenn vorausgesetzt wird,

daß, in der Nähe dieser besonderen Werthe, die Function

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

gleichzeitig in Beziehung auf x, so wie auf y, z, ... eine stetige sei, so wird u, als Function von t betrachtet, ebenfalls in der Nähe des besonderen Werthes $t = T$ eine stetige Function von t sein.

Wenn man in dem vorhergehenden Lehrsatze die Veränderlichen x, y, z, ... auf eine einzige, x, reducirt, so wird man folgenden neuen Lehrsatz erhalten:

Lehrsatz 3. Es sei in der Gleichung

$$u = f(x)$$

die Veränderliche x eine Function einer andern Veränderlichen t, und zwar eine, in der Nähe des besonderen Werthes $t = T$, stetige Function von t; und u eine, in der Nähe des besonderen dem $t = T$ entsprechenden Werthes $x = X$, stetige Function von x; so wird die Größe u, als Function von t betrachtet, ebenfalls in der Nähe des besonderen Werthes $t = T$ stetig sein.

Wenn z. B.

$$u = ax, \text{ und } x = t^n \text{ ist,}$$

wo a eine constante Größe, und n eine ganze Zahl bedeutet, so folgt aus dem dritten Lehrsatze, daß

$$u = at^n,$$

zwischen irgendwelchen Grenzen der Veränderlichen t, eine stetige Function dieser Veränderlichen ist.

Eben so folgt aus dem zweiten Lehrsatze, daß, wenn man

$$u = \frac{x}{y}, \quad x = \sin. t, \quad y = \cos. t$$

setzt, die Function

$$u = \text{tang. } t$$

in Beziehung auf t, in der Nähe irgend eines endlichen Werthes dieser Veränderlichen, stetig ist, so oft dieser Werth nicht in der Formel

$$t = \pm 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

enthalten ist, wo k eine ganze Zahl bedeutet, d. h., so oft diesem Werthe von t ein endlicher Werth von tang. t entspricht. Dagegen wird bei der Function tang. t ein Aufhören oder eine Unterbrechung der Stetigkeit stattfinden, wenn sie, für jeden in der eben erwähnten Formel enthaltenen Werth von t, unendlich wird.

Es sei ferner

$$u = a + x + y + z + \text{etc.}\ldots$$

$$x = bt,\ y = ct^2,\ \text{etc.}\ldots$$

wo a, b, c, ... constante Größen bedeuten; u sei eine, zwischen irgendwelchen Grenzen dieser veränderlichen Größen, stetige Function, und x, y, z, ... durchweg stetige Functionen der Veränderlichen t, zwischen irgendwelchen Grenzen der letzteren; so folgt aus dem dritten Lehrsatze, daß die Function

$$u = a + bt + ct^2 + \text{etc.}\ldots$$

selbst zwischen irgendwelchen Grenzen von t stetig ist. Folglich wird, wenn t sich der Grenze Null nähert, die Function u sich der Grenze a nähern und zuletzt einerlei Zeichen mit dieser Grenze haben, was mit dem vierten Lehrsatze des §. 1. übereinstimmt.

Eine merkwürdige Eigenschaft der stetigen Functionen einer einzigen Veränderlichen ist die, daß man sich ihrer bedienen kann, um in der Geometrie die Ordinaten stetiger, gerader oder krummer Linien auszudrücken. Aus dieser Betrachtung ergibt sich sehr leicht folgender Satz.

Lehrsatz 4. Wenn die Function $f(x)$ in Beziehung auf die Veränderliche x, zwischen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$, stetig ist, und wenn b eine zwischen $f(x_0)$ und $f(X)$ liegende Größe bedeutet, so wird man stets der Gleichung

$$f(x) = b$$

durch einen oder durch mehrere reelle, zwischen den Grenzen x_0 und X liegende Werthe von x Genüge leisten können.

Beweis. Um zu dem vorhergehenden Satze zu gelangen, ist es hinreichend, sich zu überzeugen, daß die Curve, deren Gleichung

$$y = f(x)$$

ist, der geraden Linie, welche zur Gleichung

$$y = b$$

hat, in demjenigen Theile ihres Laufes, welcher zwischen die den Abscissen x_0 und X entsprechenden Ordinaten fällt, ein- oder mehreremale begegnen (sie schneiden) muß, was übrigens unter der gemachten Voraussetzung offenbar der Fall sein wird. Da nämlich die Function $f(x)$ zwischen x_0 und X stetig ist, so wird die Curve, welche $y = f(x)$ zur Gleichung hat und 1stens durch den den Coordinaten x_0 und $f(x_0)$, 2tens aber auch durch den den Coordinaten X und $f(X)$ entsprechenden Punct geht, zwischen diesen beiden Puncten stetig sein, und da die constante Ordinate b der geraden Linie, deren Gleichung $y = b$ ist, zwischen den Ordinaten der beiden Puncte, welche wir betrachten, also zwischen $f(x_0)$ und $f(X)$ fällt, so wird die gerade Linie zwischen diesen beiden Puncten hindurchgehen, was sie nicht kann, ohne die oben erwähnte Curve zu schneiden.

Man kann übrigens, wie in der dritten Note geschieht, den vierten Lehrsatz auf eine directe und rein analytische Art beweisen, welche sogar den Vortheil hat, daß sie auf die numerische Auflösung der Gleichung $f(x) = b$ führt.

§. 3. Besonders merkwürdige Werthe der Functionen in einzelnen Fällen.

Wenn eine Function von einer oder von mehreren Veränderlichen, für ein System von Werthen, welche diesen Veränderlichen beigelegt werden, nur einen einzigen Werth zuläßt, so kann dieser *eine* Werth gewöhnlich schon aus der bloßen Definition der Function abgeleitet werden. Tritt ein besonderer Fall ein, in welchem sich nicht mehr unmittelbar auf diese Art der Werth ergiebt, auf welchen es abgesehen ist, so sucht man die Grenze oder die Grenzen, welchen sich diese Function nähert, sobald sich die Veränderlichen gewissen besonderen, ihnen beige-

legten Werthen unendlich nähern, und wenn es eine oder mehrere Grenzen dieser Art gibt, so werden dieselben als eben so viele, der gemachten Voraussetzung entsprechende, Werthe der Function angesehen. Wir wollen die auf die oben erwähnte Weise bestimmten Werthe der vorgelegten Function besonders merkwürdige Werthe derselben nennen. Zu diesen gehören z. B. diejenigen, welche man erhält, wenn man den Veränderlichen unendliche Werthe gibt, und oft auch diejenigen, welche Unterbrechungen der Stetigkeit entsprechen. Die Ermittelung der ganz besonderen Werthe einer Function gehört zu den wichtigsten und feinsten Untersuchungen der Analysis; sie ist mit größeren oder geringeren Schwierigkeiten verknüpft, je nach Beschaffenheit der Functionen und der Anzahl der Veränderlichen, welche dieselben enthalten.

Wenn man zuvörderst die einfachen Functionen mit einer Veränderlichen betrachtet, so wird man finden, daß es leicht ist, ihre besonders merkwürdigen Werthe zu bestimmen. Diese Werthe entsprechen stets einer von den drei Hypothesen

$$x = -\infty,\ x = 0,\ x = +\infty$$

und sind respective

für die Function

$a + x$ (a beliebig) $a + \infty = \infty, \ldots\ a - \infty = -\infty,$

$a - x$ (a beliebig) $a - \infty = -\infty, \ldots\ a - (-\infty) = +\infty,$

ax { a positiv $a \times \infty = \infty, \ldots\ a \times -\infty = -\infty,$
a negativ $a \times \infty = -\infty, \ldots\ a \times -\infty = \infty,$

$\frac{a}{x}$ { a positiv $\frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \pm\infty,\ \frac{a}{-\infty} = 0,$
a negativ $\frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \mp\infty,\ \frac{a}{-\infty} = 0,$

x^a { a positiv ..... $0^a = 0,\ \infty^a = \infty,$
a negativ ..... $0^a = \infty,\ \infty^a = 0,$

A^x { $A > 1$ ..... $A^{-\infty} = 0,\ A^0 = 1,\ A^\infty = \infty,$
$A < 1$ ..... $A^{-\infty} = \infty,\ A^0 = 1,\ A^\infty = 0,$

$L(x)$ { die Grundzahl größer als 1 .... $L(0) = -\infty,\ L(\infty) = \infty,$
die Grundzahl kleiner als 1 .... $L(0) = \infty,\ L(\infty) = -\infty,$

$\sin. x \ldots . \sin.((-\infty)) = M((-1,+1))$, $\sin.((\infty)) = M((-1,+1))$
$\cos. x \ldots . \cos.((-\infty)) = M((-1,+1))$, $\cos.((\infty)) = M((-1,+1))$.

Das Zeichen $M((-1,+1))$ bezeichnet hier, wie in den Vorerinnerungen, irgend eine zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegende Größe. Es verdient bemerkt zu werden, daß, wenn man $a = \pm m$ setzt (wo m eine ganze Zahl bedeutet), die einfache Function

$$x^a$$

stets drei besonders merkwürdige Werthe zuläßt, nämlich

wenn $a = +m$ { m gerade $\ldots (-\infty)^m = \infty, 0^m = 0, \infty^m = \infty$,
{ m ungerade $\ldots (-\infty)^m = -\infty, 0^m = 0, \infty^m = \infty$,

und wenn $a = -m$ { m gerade $\ldots (-\infty)^{-m} = 0, 0^{-m} = \infty, \infty^{-m} = 0$,
{ m ungerade $\ldots (-\infty)^{-m} = 0, (0)^{-m} = \pm\infty, \infty^{-m} = 0$.

Wir wollen nun die zusammengesetzten Functionen mit einer Veränderlichen x betrachten. Oft ist es leicht, ihre besonders merkwürdigen Werthe zu finden. Wenn man sich z. B. unter k irgend eine ganze Zahl denkt, so wird man ohne Mühe einsehen, daß die zusammengesetzte Function

$$\text{tang. } x = \frac{\sin. x}{\cos. x}$$

besonders merkwürdige Werthe hat, welche in den 3 Formeln

$$\text{tang.}((\infty)) = M((-\infty,+\infty)); \text{ tang.}\left(\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right)\right) = \pm\infty;$$
$$\text{tang.}((-\infty)) = M((-\infty,+\infty))$$

enthalten sind; während die besonders merkwürdigen Werthe der umgekehrten Function

$$\text{arc. tang. } x = \text{arc. sin. } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

respective

$$\text{arc. tang.}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}, \text{ arc. tang.}(\infty) = \frac{\pi}{2} \text{ sind.}$$

Oft aber sind ähnliche Untersuchungen mit nicht unbedeutenden Schwierigkeiten verknüpft. Man bemerkt z. B. nicht unmittelbar, auf welche Weise der besonders merkwürdige Werth der Function

x^{x^x}

gefunden werden kann, wenn darin $x = 0$ gesetzt wird, oder der der Function

$$x^{\frac{1}{x}},$$

wenn darin $x = \infty$ gesetzt wird. Um eine Idee von den Methoden zu geben, mittelst welcher dergleichen Aufgaben gelöst werden, will ich hier zwei Lehrsätze aufstellen, mit Hülfe deren man in einer großen Menge von Fällen die besonders merkwürdigen Werthe der beiden Functionen

$$\frac{f(x)}{x}, \quad [f(x)]^{\frac{1}{x}},$$

wenn in beiden $x = \infty$ gesetzt wird, bestimmen kann.

Lehrsatz 1. Wenn für zunehmende Werthe von x die Differenz

$$f(x+1) - f(x)$$

sich einer gewissen Grenze k nähert, so nähert sich gleichzeitig

$$\frac{f(x)}{x}$$

derselben Grenze.

Beweis. Es sei zuvörderst k eine endliche Größe, und ε bezeichne eine beliebig kleine Zahl. Da nun die Differenz

$$f(x+1) - f(x)$$

sich der Grenze k nähert, wenn die Werthe von x wachsen, so wird es immer eine Zahl h geben, welche so groß ist, daß, während $x \geqq h$ ist, die Differenz, von welcher die Rede ist, zwischen den Grenzen

$$k - \varepsilon, \; k + \varepsilon$$

liegen muß. Wenn mithin n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so werden die Größen

$$f(h+1) - f(h)$$
$$f(h+2) - f(h+1)$$
$$\text{etc.} \ldots$$
$$f(h+n) - f(h+n-1),$$

und folglich auch ihr arithmetisches Mittel, nämlich

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}$$

zwischen den Grenzen $k-\varepsilon$, $k+\varepsilon$ liegen. Man wird demnach haben

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n} = k+\alpha,$$

wo α eine zwischen den Grenzen $-\varepsilon$, $+\varepsilon$ liegende Größe ist. Es sei ferner

$$h+n=x,$$

so wird die vorhergehende Gleichung sich in folgende verwandeln:

$$(1) \qquad \frac{f(x)-f(h)}{x-h} = k+\alpha,$$

und hieraus folgt:

$$f(x) = f(h)+(x-h)(k+\alpha)$$

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{x} = \frac{f(h)}{x} - \left(1-\frac{h}{x}\right)(k+\alpha).$$

Um nun den Werth von x bis ins Unendliche wachsen zu lassen, braucht man nur die ganze Zahl n auf diese Art wachsen zu lassen, ohne daß der Werth von h sich ändert. Wir wollen demzufolge h in der Gleichung (2) als eine constante, x dagegen als eine veränderliche Größe ansehen, welche sich der Grenze ∞ nähert. Die Größen

$$\frac{f(h)}{x} \quad \text{und} \quad \frac{h}{x},$$

welche der zweite Theil dieser Gleichung enthält, werden sich alsdann der Grenze Null, der zweite Theil selbst aber einer Grenze von der Form

$$k+\alpha$$

nähern, wo α fortwährend zwischen $-\varepsilon$, $+\varepsilon$ liegt. Mithin wird das Verhältniß

$$\frac{f(x)}{x}$$

eine zwischen $k-\varepsilon$ und $k+\varepsilon$ liegende Grenze haben. Da diese Schlußfolge dieselbe bleibt, der Werth von ε mag so klein sein, als man immer wolle, so folgt, daß die fragliche Grenze

keine andere als die Größe k sein kann. Mit andern Worten, man wird haben

$$(3) \qquad \lim. \frac{f(x)}{x} = k = \lim. [f(x+1) - f(x)].$$

Wir wollen zweitens $k = \infty$ setzen. Wenn man sodann sich unter H eine beliebig große Zahl denkt, so wird man immer h so groß annehmen können, daß, wenn $x \geqq h$ ist, die Differenz

$$f(x+1) - f(x),$$

welche sich der Grenze ∞ nähert, beständig größer als H wird; und wenn man, wie oben, weiter schließt, so wird man die Formel

$$\frac{f(h+n) - f(h)}{n} > H$$

erhalten. Setzt man nun $h + n = x$, so wird man statt der Gleichung (2) folgende Formel finden

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{f(h)}{x} + H\left(1 - \frac{h}{x}\right),$$

aus welcher man, wenn man x sich der Grenze ∞ nähern läßt,

$$\lim. \frac{f(x)}{x} > H$$

erhält.

Die Grenze des Verhältnisses

$$\frac{f(x)}{x}$$

wird also größer sein, als die Zahl H, so groß die letztere immer sein mag. Diese Grenze kann, insofern sie größer ist, als jede anzugebende Zahl, keine andere als $+\infty$ sein.

Wir wollen endlich $k = -\infty$ setzen. Um diesen letztern Fall auf den vorigen zurück zu führen, ist es hinreichend, zu bemerken, daß, da dieser Annahme gemäß die Differenz

$$f(x+1) - f(x)$$

$-\infty$ zur Grenze hat, die folgende

$$[-f(x+1)] - [-f(x)]$$

$+\infty$ zur Grenze haben wird, woraus sich ergibt: daß $+\infty$

die Grenze von $\frac{-f(x)}{x}$, und folglich $-\infty$ die Grenze von $\frac{f(x)}{x}$ sein wird.

Zusatz 1. Um den vorhergehenden Lehrsatz auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir setzen

$$f(x) = L(x),$$

wo L sich auf ein logarithmisches System bezieht, dessen Grundzahl größer als die Einheit ist. Man findet:

$$f(x+1) - f(x) = L(x+1) - L(x) = L\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

und folglich

$$k = L\left(1+\frac{1}{\infty}\right) = L(1) = 0.$$

Es ist also erwiesen, daß, wenn x bis ins Unendliche zunimmt, das Verhältniß

$$\frac{L(x)}{x}$$

sich der Grenze Null nähern wird, woraus folgt: daß in einem Systeme, dessen Basis größer als die Einheit ist, die Logarithmen der Zahlen weit weniger schnell zunehmen, als die Zahlen selbst.

Zusatz 2. Es sei zweitens

$$f(x) = A^x,$$

wo A eine Zahl bedeutet, welche größer als die Einheit ist. Man wird finden:

$$f(x+1) - f(x) = A^{x+1} - A^x = A^x(A-1),$$

und folglich $k = A^{\infty}.(A-1) = \infty$.

Es ist also erwiesen, daß, wenn x bis ins Unendliche wächst, das Verhältniß

$$\frac{A^x}{x}$$

sich der Grenze ∞ nähert; woraus folgt: daß, wenn A größer als die Einheit ist, die Exponentialgröße A^x zuletzt bei Weitem schneller wächst, als die Veränderliche x.

Zusatz 3. Es ist übrigens zu bemerken, daß man nur dann nach dem 1sten Lehrsatze den Werth des Verhältnisses

$$\frac{f(x)}{x},$$

welcher $x = \infty$ entspricht, zu suchen hat, wenn $f(x)$ zugleich mit der Veränderlichen x unendlich wird. Wenn nämlich diese Function für $x = \infty$ einen endlichen Werth hätte, so würde offenbar das Verhältniß $\frac{f(x)}{x}$ Null zur Grenze haben.

Ich gehe zu dem Lehrsatze über, nach welchem man in verschiedenen Fällen den Werth von

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

für $x = \infty$ bestimmen kann.

Lehrsatz 2. Wenn die Function $f(x)$ für sehr große Werthe von x positiv ist, und wenn überdies das Verhältniß

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

sich der Grenze k nähert, sobald x bis ins Unendliche zunimmt, so nähert sich gleichzeitig der Ausdruck

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

derselben Grenze.

Beweis: Wir wollen annehmen, die wesentlich positive Größe k habe einen endlichen Werth, und ε sei eine beliebig kleine Zahl. Da nun, wenn die Werthe von x wachsen, das Verhältniß

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

sich der Grenze k nähert, so wird es immer eine Zahl h geben, welche so groß ist, daß, wenn $x \geqq h$ ist, das Verhältniß, von welchem die Rede ist, beständig zwischen den Grenzen

$$k - \varepsilon, \quad k + \varepsilon$$

liegt. Wenn man demnach unter n eine beliebige ganze Zahl versteht, so wird jede der Größen

$$\frac{f(h+1)}{f(h)}, \frac{f(h+2)}{f(h+1)}, \cdots \frac{f(h+n)}{f(h+n-1)},$$

mithin auch ihr geometrisches Mittel

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{n}}$$

zwischen den Grenzen $k - \varepsilon$, $k + \varepsilon$ liegen; man wird folglich haben:

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{n}} = k + \alpha,$$

wo α eine zwischen den Grenzen $-\varepsilon$, $+\varepsilon$ liegende Zahl ist.

Es sei nun $h + n = x$, so wird die vorhergehende Gleichung sich in folgende verwandeln:

$$(4) \qquad \left[\frac{f(x)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{x-h}} = k + \alpha,$$

woraus folgt:

$$f(x) = f(h).(k+\alpha)^{x-h}, \text{ und}$$

$$(5) \qquad [f(x)]^{\frac{1}{x}} = f(h)]^{\frac{1}{x}}.(k+\alpha)^{1-\frac{h}{x}}.$$

Um nun den Werth von x bis ins Unendliche wachsen zu lassen, darf man nur die ganze Zahl n auf diese Art wachsen lassen, ohne daß der Werth von h sich ändert. Wir wollen demzufolge in der Gleichung (5) h als eine constante Größe ansehen, x dagegen als eine Veränderliche, welche sich der Grenze ∞ nähert, so werden sich die Größen

$$[f(h)]^{\frac{1}{x}}, \; 1 - \frac{h}{x},$$

welche der zweite Theil der Gleichung enthält, der Grenze 1, der zweite Theil selbst aber einer Grenze von der Form

$$k + \alpha$$

nähern, wo α beständig zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegt. Mithin wird der Ausdruck

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

eine zwischen $k - \varepsilon$ und $k + \varepsilon$ liegende Grenze haben. Da diese Schlußfolge dieselbe bleibt, der Werth von ε mag so klein sein, als man immer wolle, so folgt: daß die fragliche Grenze keine andere als die Größe k sein kann; mit andern Worten: man wird haben

$$(6) \qquad \lim. [f(x)]^{\frac{1}{x}} = k = \lim. \frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

Wir wollen 2tens k unendlich groß annehmen, d. h. $k = +\infty$, da diese Größe positiv ist. Bezeichnet dann H eine beliebig große Zahl, so wird man immer, wenn $x \geqq h$ ist, diese letztere Zahl so groß annehmen können, daß das Verhältniß

$$\frac{f(x+1)}{f(x)},$$

welches sich der Grenze ∞ nähert, beständig größer als H ist, und wenn man, wie oben, weiter schließt, so wird man die Formel

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{n}} > H$$

erhalten. Setzt man nun $h + n = x$, so findet man, statt der Gleichung (5) folgende Formel

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}} > [f(h)]^{\frac{1}{x}} . H^{1-\frac{h}{x}},$$

woraus, wenn man x sich der Grenze ∞ nähern läßt, folgt:

$$\lim. [f(x)]^{\frac{1}{x}} > H.$$

Die Grenze von

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

wird demnach größer als H sein, wie groß diese Zahl immer sein mag; mithin kann diese Grenze, da sie größer als jede anzugebende Zahl ist, keine andere, als $+\infty$ sein.

Anmerkung. Man könnte die Gleichung (6) auch auf einem anderen Wege herleiten, indem man nach Lehrsatz 1. die Grenze suchte, welcher sich

$$L[f(x)]^{\frac{1}{x}} = \frac{L f(x)}{x}$$

nähert, und dann von den Logarithmen auf die Zahlen zurück ginge

Zusatz 1. Um den 2ten Lehrsatz auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir annehmen

$$f(x) = x;$$

so wird man haben

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x},$$

mithin, wenn man die Grenze nimmt,

$$k = 1.$$

Die Function

$$x^{\frac{1}{x}}$$

wird also, wenn man die Veränderliche x bis ins Unendliche wachsen läßt, sich der Grenze 1 nähern.

Zusatz 2. Es sei ferner

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \text{etc.} \ldots = P,$$

wo also P einem Polynom gleich ist, welches in Beziehung auf x vom n^{ten} Grade ist, so wird man finden

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{a\left(1+\frac{1}{x}\right)^n + \frac{b}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \frac{c}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \text{etc.} \ldots}{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \text{etc.} \ldots}$$

und, wenn man hiervon die Grenze nimmt,

$$k = \frac{a}{a} = 1.$$

Wenn demnach P ein beliebiges ganzes Polynom ist, so wird $P^{\frac{1}{x}}$ die Einheit zur Grenze haben.

Zusatz 3. Es sei endlich

$$fx = L(x),$$

so wird man finden

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{L(x+1)}{L(x)} = \frac{L(x) + L\left(1+\frac{1}{x}\right)}{L(x)}$$

$$= 1 + \frac{L\left(1+\frac{1}{x}\right)}{L(x)},$$

wovon die Grenze $k = 1$ ist. Folglich wird $[L(x)]^{\frac{1}{x}}$ ebenfalls die Grenze 1 haben.

Die Lehrsätze 1 und 2 gelten offenbar selbst dann, wenn für x keine anderen Werthe als ganze Zahlen gesetzt werden können. In der That braucht man, um die oben geführten Beweise auch für diesen besonderen Fall gültig zu machen, nur anzunehmen: daß die in jedem der beiden Beweise durch h bezeichnete Größe eine sehr große Zahl sei. Wenn man in eben diesem Falle die successiven Werthe von f (x), welche den verschiedenen ganzen Werthen von x entsprechen,

also $f(1), f(2), f(3), \ldots f(n),$

durch $A_1, A, A_3, \ldots A_n$

bezeichnet, so erhält man statt der Lehrsätze 1 und 2 folgende Sätze.

Lehrsatz 3. Wenn die Reihe

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n \text{ etc.} \ldots$$

von der Art ist, daß die Differenz zwischen irgend zweien auf einander folgenden Gliedern derselben, also

$$A_{n+1} - A_n,$$

sich einer bestimmten Grenze A beständig nähert, wenn die Werthe von n wachsen, so wird gleichzeitig das Verhältniß

$$\frac{A_n}{n},$$

sich derselben Grenze nähern.

Lehrsatz 4. Wenn die Reihe der Zahlen

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n, \text{ etc.} \ldots$$

von der Art ist, daß das Verhältniß zwischen zweien auf einander folgenden Gliedern derselben, also

$$\frac{A_{n+1}}{A_n},$$

sich einer bestimmten Grenze A beständig nähert, wenn die Werthe von n wachsen, so nähert sich gleichzeitig auch der Ausdruck

$$(A_n)^{\frac{1}{n}}$$

eben dieser Grenze.

Um ein Beispiel von der Anwendung des letzten Lehrsatzes zu geben, wollen wir

$$A_n = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ n$$

setzen, so wird die Reihe A_1, A_2, A_3, ... etc. folgende sein:

$$1,\ 1.2,\ 1.2.3,\ 1.2.3.4,\ \ldots.\ 1.2.3.\ldots.(n-1)\,n,\ \text{etc.}\ldots.$$

und das Verhältniß zwischen zweien, auf einander folgenden Gliedern der Reihe oder

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1.2.3.4\ldots.n\,(n+1)}{1.2.3.4\ldots.n} = n+1$$

wird offenbar, wenn die Werthe von n wachsen, sich der Grenze ∞ nähern; mithin nähert sich der Ausdruck

$$(A_n)^{\frac{1}{n}} = (1.2.3.4\ldots n)^{\frac{1}{n}}$$

derselben Grenze.

Dagegen würde man finden, daß, wenn die Werthe von n wachsen, der Ausdruck

$$\left(\frac{1}{1.2.3\ldots n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

sich der Grenze Null nähert.

Oft kann man mit Hülfe der Lehrsätze 1 und 2 den besonders merkwürdigen Werth bestimmen, welchen eine zusammengesetzte Function der Veränderlichen x erhält, wenn diese Veränderliche verschwindet. Will man z. B. den besonders merkwürdigen Werth von x^x erhalten, welcher dem Falle $x=0$ entspricht, so wird man nur die Grenze suchen dürfen für den Ausdruck $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{x}}}$ und zwar für wachsende Werthe von x. Diese Grenze aber ist, nach Lehrsatz 2. (Zusatz 1.), der Einheit gleich.

Eben so folgt aus Lehrs. 1. (Zus. 1.), daß die Function

$$xL\,(x)$$

zugleich mit der Veränderlichen x verschwindet.

Wenn Zähler und Nenner eines Bruches unendlich kleine Größen sind, deren Werthe zugleich mit denen der Veränderlichen α bis ins Unendliche

abnehmen, so ist der besonders merkwürdige Werth dieser Function, welcher $\alpha = 0$ entspricht, bald endlich, bald Null, bald unendlich. Denken wir uns nämlich unter k, k′ zwei constante endliche Größen, welche aber nicht Null sein dürfen, unter ε, ε′ aber zwei variable Zahlen, welche sich gleichzeitig mit α der Grenze Null unendlich nähern, so werden wir zwei unendlich kleine Größen, wovon die eine von der Ordnung n, die andere von der Ordnung n′ ist, respective durch

$$k\alpha^n (1 \pm \varepsilon), \quad k'\alpha^{n'} (1 \pm \varepsilon'),$$

bezeichnen können, und ihr Verhältniß, also

$$\frac{k'\alpha^{n'}(1 \pm \varepsilon')}{k\alpha^n(1 \pm \varepsilon)} = \frac{k'}{k} \cdot \frac{1 \pm \varepsilon'}{1 \pm \varepsilon} \cdot \alpha^{n'-n} = \frac{k'}{k} \cdot \frac{1 \pm \varepsilon'}{1 \pm \varepsilon} \cdot \frac{1}{L^{n-n'}},$$

wird offenbar zur Grenze haben

$\frac{k'}{k}$, wenn man $n' = n$ setzt,

0, wenn man $n' > n$ setzt,

$\pm\infty$, wenn man $n' < n$ setzt.

Eben so läßt sich beweisen: daß die Grenze, welcher sich das Verhältniß zweier unendlichen Größen nähert, wenn ihre Werthe gleichzeitig mit denen einer Veränderlichen x bis ins Unendliche wachsen, Null, oder endlich, oder unendlich sein kann; nur mit dem Unterschiede, daß diese Grenze ein bestimmtes Zeichen hat, welches sich beständig aus den Zeichen der Größen ergibt, welche man betrachtet. Zu den Brüchen, deren Zähler und Nenner zugleich mit der Veränderlichen α sich der Grenze Null nähern, gehört auch folgender:

$$\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha},$$

so oft man nämlich der Veränderlichen x einen Werth gibt, in dessen Nähe die Function f (x) stetig ist. Es ist nämlich in diesem Falle die Differenz

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

eine unendlich kleine Größe. Man kann sogar bemerken, daß sie im Allgemeinen ein unendlich Kleines von der ersten Ordnung ist, so daß also das Verhältniß

$$\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$$

gewöhnlich sich einer von Null verschiedenen, endlichen Grenze nähert, wenn der Werth von α abnimmt. Diese Grenze ist z. B.

$2x$, wenn $f(x) = x^2$ gesetzt wird

und $-\frac{a}{x^2}$, wenn $f(x) = \frac{a}{x}$ gesetzt wird.

In dem besonderen Falle, wo $x = 0$ wird, verwandelt sich das Verhältniß $\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$ in

$$\frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha}.$$

Wir wollen uns darauf beschränken, unter den Verhältnissen der letztern Art nur das folgende

$$\frac{\sin.\ \alpha}{\alpha}$$

zu betrachten. Da dieses unter die Form

$$\frac{\sin.(-\alpha)}{-\alpha}$$

gebracht werden kann, so wird seine Grenze dieselbe bleiben, ganz unabhängig von dem Zeichen von α. Wenn wir demnach für α irgend einen positiven oder negativen Werth setzen, so erhalten wir offenbar, da chord. $2\alpha = 2 \sin.\ \alpha$ ist, $2\alpha > 2 \sin.\ \alpha$, mithin auch

$$\alpha > \sin.\ \alpha.$$

Da überdies die Summe der an die beiden Endpuncte des Bogens 2α gezogenen Tangenten durch 2 tang. α ausgedrückt wird, und da diese Summe ein Theil des Umfanges eines Polygons ist, welcher den Bogen einschließt, so wird man überdies haben 2 tang. $\alpha > 2\alpha$, mithin auch

$$\text{tang.}\ \alpha > \alpha.$$

Wenn man die beiden so eben gefundenen Formeln zusammenzieht, so findet man

$$\sin.\ \alpha < \alpha < \text{tang.}\ \alpha;$$

und setzt man hierauf für tang. α deren Werth, so erhält man

$$\sin.\,\alpha < \alpha < \frac{\sin.\,\alpha}{\cos.\,\alpha},$$

mithin auch

$$1 < \frac{\alpha}{\sin.\,\alpha} < \frac{1}{\cos.\,\alpha}$$

$$1 > \frac{\sin.\,\alpha}{\alpha} > \cos.\,\alpha.$$

Nun nähert sich, wenn α abnimmt, $\cos.\,\alpha$ der Grenze 1; um so mehr wird dieses also bei dem Verhältnisse $\frac{\sin.\,\alpha}{\alpha}$ der Fall sein, welches beständig zwischen 1 und α liegt. Man wird demnach haben

$$(7) \qquad \lim.\ \frac{\sin.\,\alpha}{\alpha} = 1.$$

Da das Aufsuchen der Grenzen, welchen sich die Verhältnisse $\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$, $\frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha}$ nähern, einer der Hauptgegenstände des Infinitesimalcalculs ist, so wollen wir uns nicht länger dabei aufhalten.

Wir haben nun noch die besonders merkwürdigen Werthe der Functionen mit mehreren Veränderlichen zu untersuchen. Oft sind diese völlig bestimmt und von allen zwischen den Veränderlichen möglichen Beziehungen unabhängig. Wenn man z. B. durch

$$\alpha,\ \beta,\ x,\ y$$

vier positive Veränderliche bezeichnet, von welchen die beiden Ersten sich der Grenze Null, die beiden Letzten aber der Grenze ∞ nähern, so ist es einleuchtend, daß die Ausdrücke

$$\alpha\beta,\ xy,\ \frac{\alpha}{x},\ \frac{y}{\beta},\ \alpha^y,\ x^y$$

respective die Grenzen

$$0,\ \infty,\ 0,\ \infty,\ 0,\ \infty$$

haben. Gewöhnlich aber kann der besondere Werth einer Function von mehreren Veränderlichen nur in dem besonderen Falle genau bestimmt werden, wenn man, sobald man diese Veränderlichen ihren respectiven Grenzen sich nähern läßt, gewisse Relationen

zwischen denselben feststellt. So lange dieses nicht geschehen ist, bleibt der besondere Werth, auf den es ankommt, entweder völlig unbestimmt oder doch nur der Bedingung unterworfen, daß er zwischen bekannte Grenzen fällt. So kann z. B., wie wir bereits oben gesehen haben, der besondere Werth, auf welchen sich das Verhältniß zweier unendlich kleinen Größen reducirt, wenn Beide Null werden, endlich, Null oder unendlich sein; mit andern Worten: dieser besondere Werth ist völlig unbestimmt. Wenn man, anstatt zweier unendlich kleinen Veränderlichen zwei unendlich große Veränderliche betrachtet, so wird man finden: daß das Verhältniß der Letztern sich, wenn ihre Zahlenwerthe bis ins Unendliche wachsen, ebenfalls einer willkürlichen Grenze nähern, welche aber positiv oder negativ sein wird, je nachdem die beiden Veränderlichen gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Eben so leicht ist zu ersehen, daß ein Product zweier Factoren, von welchen der eine unendlich klein, der andere unendlich groß ist, eine durchaus unbestimmte Größe zur Grenze haben wird.

Um die so eben aufgestellten Principien auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir untersuchen, welchen Werth die Veränderlichen x, y haben müssen, wenn der Werth der Function

$$y^{\frac{1}{x}}$$

unbestimmt werden soll. Versteht man unter A eine Zahl, welche größer als die Einheit, ist und unter L das Zeichen der Logarithmen desjenigen Systems, dessen Basis A ist, so hat man offenbar

$$y = A^{L(y)},$$

mithin auch

$$y^{\frac{1}{x}} = A^{\frac{L(y)}{x}}.$$

Uebrigens ist es einleuchtend, daß der Ausdruck

$$A^{\frac{L(y)}{x}}$$

sich einer unbestimmten Grenze nähern wird, wenn das Verhältniß

$$\frac{L(y)}{x}$$

selbst einer ähnlichen Grenze sich nähert, was in zwei verschiedenen Fällen stattfindet, nämlich 1stens, wenn $L(y)$ und x zwei unendlich kleine Größen sind, d. h. wenn $x = 0$, $y = 1$ ist; 2tens, wenn $L(y)$ und x beide unendlich groß sind, d. h., wenn die Grenze von y entweder 0 oder ∞ ist, während $x = \infty$ ist. Es verdient bemerkt zu werden, daß in beiden Fällen die unbestimmte Grenze des Ausdrucks

$$A^{\frac{L(y)}{x}} = y^{\frac{1}{x}}$$

nothwendig positiv sein wird. Es kann sogar der Fall eintreten, daß diese Grenze der Bedingung unterworfen ist: stets zwischen 0 und 1 zu liegen, oder auch zwischen 1 und ∞. Wir wollen z. B. annehmen, daß jede der Veränderlichen x, y sich der Grenze ∞ nähere. Da in diesem Falle die Grenze des Verhältnisses

$$\frac{L(y)}{x}$$

eine beliebige positive Größe ist, so wird die von $y^{\frac{1}{x}} = A^{\frac{L(y)}{x}}$ eine zwischen 1 und ∞ liegende Größe sein müssen; welche? bleibt unbestimmt, so lange keine besondere Relation zwischen den unendlich großen Veränderlichen x und y vorhanden ist. Nimmt man aber an, daß

$$y = f(x)$$

sei, wo $f(x)$ eine gleichzeitig mit x bis ins Unendliche wachsende Function bezeichnet, so wird das zu suchende Mittel zwischen 1 und ∞ nichts Anderes als die Grenze von

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

sein, welche einen bestimmten Werth hat und mit Hülfe des zweiten Lehrsatzes gefunden werden kann.

Wenn man statt der Function $y^{\frac{1}{x}}$ folgende

$$y^x$$

betrachtet, so findet man, daß die Grenze derselben einen bestimmten Werth hat: 1) wenn y sich der Grenze 1 nähert, x dagegen entweder der Größe $-\infty$ oder $+\infty$; 2) wenn y sich der Grenze Null oder $+\infty$ nähert, während x Null zur Grenze hat.

Oft stößt man im Calcul auf ganz besondere Ausdrücke, welche durchaus als Grenzen angesehen werden müssen, denen sich die Functionen mehrerer Veränderlichen nähern, wenn diese Veränderlichen selbst unendlich groß oder unendlich klein werden, oder, noch allgemeiner, wenn sie sich bestimmten Grenzen nähern. Dergleichen sind z. B.

$$0\times 0,\ \frac{0}{0},\ \infty\times\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ 0^{\circ},\ 1^{\infty},\ \text{etc.}\ldots\ldots$$

von welchen die beiden ersten Ausdrücke als die Grenzen zu betrachten sind, welchen sich das Product und das Verhältniß zweier unendlich kleinen veränderlichen Größen nähert; die beiden folgenden als die Grenzen des Productes und des Verhältnisses zweier unendlich großen positiven Veränderlichen u. s. w. Wenn man die besonders merkwürdigen Werthe der Functionen

$$x+y,\ xy,\ \frac{x}{y},\ y^{x},\ y^{\frac{1}{x}}$$

betrachtet, so wird man finden: daß die Werthe dieser Ausdrücke, wenn die Veränderlichen unabhängig bleiben, sehr leicht nach dem Vorhergehenden bestimmt werden können. Die Gleichungen, welche zur Bestimmung dieser respectiven Werthe dienen, sind folgende:

für die Function

$x+y\ldots\ \infty+\infty=\infty,\ \infty-\infty=M\ ((-\infty,+\infty))$;

$xy\ldots\begin{cases}0\times 0=0,=0\times\pm\infty=M\ ((-\infty,+\infty));\\ \infty\times\infty=-\infty\times-\infty=\infty,\infty\times-\infty=-\infty;\end{cases}$

$\frac{x}{y}\begin{cases}\frac{0}{0}=M((-\infty,+\infty)),\ \frac{0}{\infty}=\frac{0}{-\infty}=0,\ \pm\frac{\infty}{0}=\pm\infty;\\ \frac{\infty}{\infty}=\frac{-\infty}{-\infty}=M((0,\infty)),\ \frac{\infty}{-\infty}=\frac{-\infty}{\infty}=M((-\infty,\ 0));\end{cases}$

$y^{x}\ldots\begin{cases}0^{0}=\infty^{0}=M\ (0,\infty),\ 0^{\infty}=\infty^{-\infty}=0;\\ 0^{-\infty}=\infty^{\infty}=\infty,\ 1^{\infty}=1^{-\infty}=M\ ((0,\infty));\end{cases}$

$y^{\frac{1}{x}}\ldots\begin{cases}0^{\frac{1}{0}}=0,\infty^{\frac{1}{0}}=\infty,0^{\frac{1}{\infty}}=\infty^{-\frac{1}{\infty}}=M\ ((0,\ 1)\\ 0^{-\frac{1}{\infty}}=\infty^{\frac{1}{\infty}}=M\ ((0,\infty)),\ 1^{\frac{1}{0}}=M\ ((0,\infty)).\end{cases}$

Drittes Capitel.

Von den symmetrischen und alternirenden Functionen. Anwendung dieser Functionen bei Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer beliebigen Anzahl von unbekannten Größen. Von den homogenen Functionen.

---

§. 1. Von den symmetrischen Functionen.

Eine Function von mehreren Größen heißt eine symmetrische, wenn ihr Werth und Zeichen nach einer beliebigen, mit diesen Größen vorgenommenen Verwechselung derselbe bleibt. So z. B. ist jede der Functionen

$$x + y,\ x^y + y^y,\ xyz,\ \sin. x + \sin. y + \sin. z, \text{ etc.}...$$

symmetrisch in Beziehung auf die Veränderlichen, welche sie enthält, während

$$x - y,\ x^y, \text{ etc.}...$$

nicht symmetrische Functionen der Veränderlichen x, y sind. Desgleichen sind

$$b + c,\ b^2 + c^2,\ bc, \text{ etc.}...$$

symmetrische Functionen der beiden Größen b, c;

$$b + c + d,\ b^2 + c^2 + d^2,\ bc + bd + cd,\ bcd$$

symmetrische Functionen der drei Größen b, c, d.

Unter den symmetrischen Functionen verschiedener Größen b, c, ... g, h verdienen diejenigen besonders gemerkt zu werden, welche die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von a

in der Entwickelung des Productes $(a-b)(a-c)(a-d)$ $\ldots.(a-g)(a-h)$ bilden, und deren Eigenschaften zu einer sehr eleganten Auflösung mehrerer Gleichungen des ersten Grades zwischen n Veränderlichen $x, y, z, \ldots u, v$ führen, wenn diese Gleichungen von der Form

$$(1)\begin{cases} x + y + z \ldots. + u + v = k_0, \\ ax + by + cz \ldots. + gu + hv = k_1, \\ a^2x + b^2y + c^2z \ldots. + g^2u + h^2v = k_2, \\ \text{etc.} \ldots. \\ a^{n-1}x + b^{n-1}y + c^{n-1}z \ldots g^{n-1}u + h^{n-1}v = k_{n-1} \end{cases}$$

sind. Denn angenommen, es seien

$$A_{n-2} = -(b + c + \text{etc.} \ldots + g + h)$$

$$A_{n-3} = bc + \ldots + bg + bh + \ldots + cg + ch + \ldots + gh,$$

$$\text{etc.} \ldots.$$

$$A_0 = \pm bc \ldots. gh$$

die symmetrischen Functionen, mit welchen man es hier zu thun hat, so daß also

$$a^{n-1} + A_{n-2}.a^{n-2} + \ldots + A_1.a + A_0 = (a-b)(a-c)(a-d)\ldots$$

ist, so wird man, wenn man in dieser letzteren Formel successive erst b, dann c, etc...., dann g und endlich h statt a setzt, folgende Ausdrücke finden:

$$b^{n-1} + A_{n-2}.b^{n-2} + \text{etc.} \ldots. + A_1.b + A_0 = 0,$$

$$c^{n-1} + A_{n-2}.b^{n-2} + \text{etc.} \ldots. + A_1.c + A_0 = 0,$$

$$\text{etc.} \ldots.$$

$$g^{n-1} + A_{n-2}.g^{n-2} + \text{etc.} \ldots. + A_1.g + A_0 = 0,$$

$$h^{n-1} + A_{n-2}.h^{n-2} + \text{etc.} \ldots. + A_1.g + A_0 = 0.$$

Wenn man ferner die Gleichungen (1) Glied für Glied addirt, nachdem man die erste durch A_0, die zweite durch A_1 etc...., die vorletzte durch A_{n-2} und die letzte durch die Einheit multiplicirt hat, so erhält man folgende Gleichung:

$$(a^{n-1} + A_{n-2}.a^{n-2} + \text{etc.} \ldots. + A_1 a + A_0)\, x$$
$$= k_{n-1} + A_{n-2}.k_{n-2} + \text{etc.} \ldots. + A_1.k_1 + A_0 k_0,$$

woraus sich ergibt

$$(2) \qquad x = \frac{[k_{n-1} - (b+c..+g+h)k_{n-2} + (bc...+bg+bh...cg+ch...+gh)k_{n-3} - etc... \pm bc...gh]}{(a-b)(a-c)....(a-g)(a-h)}$$

Durch ein ähnliches Verfahren kann man die Werthe der übrigen Unbekannten y, z ... u, v finden.

Wenn man in den Gleichungen (1) für die Constanten

$$k_0, k_1, k_2, k_3 \ldots k_{n-1}$$

die auf einander folgenden ganzen Potenzen einer und derselben Größe k substituirt, also

$$1 \text{ (für } k^0), k, k^2 \ldots k^{n-1},$$

so reducirt sich der für x gefundene Werth auf

$$(3) \qquad x = \frac{(k-b)(k-c)\ldots(k-g)(k-h)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-g)(a-h)}.$$

§. 2. Von den alternirenden Functionen.

Eine Function von mehreren Größen, welche zwar ihr Zeichen ändert, wenn man zwei dieser Größen unter einander vertauscht, aber abgesehen vom Zeichen, denselben Werth behält, so daß bei einer Wiederholung ähnlicher Vertauschungen die Function abwechselnd positiv und negativ wird, heißt eine alternirende Function. Dieser Definition gemäß sind

$$x-y,\ xy^2-x^2y,\ L\left(\frac{x}{y}\right),\ \sin. x - \sin. y,\ \text{etc.}...$$

alternirende Functionen der beiden Veränderlichen x und y,

$$(x-y)(x-z)(y-z)$$

eine alternirende Function der drei Veränderlichen x, y, z.

Unter den alternirenden Functionen mit mehreren Veränderlichen x, y, z ... u, v verdienen diejenigen besonders gemerkt zu werden, welche in Beziehung auf jede dieser Veränderlichen rationale und ganze Functionen sind. Wir wollen uns eine solche entwickelte und unter die Form eines Polynoms gebrachte Function denken. Eins der Glieder, gleichviel welches?, wird von der Form

$$k\, x^p\, y\, z^r \ldots u^s\, v^t$$

sein, wo p, q, r ... s, t ganze Zahlen bezeichnen, k aber einen beliebigen Coefficienten. Da ferner die Function ihr Zeichen

verändern, von diesem abgesehen aber denselben Werth behalten muß, wenn die beiden Veränderlichen x und y mit einander vertauscht werden, so muß nothwendigerweise dem Gliede, von welchem die Rede ist, ein anderes Glied mit entgegengesetztem Zeichen, und zwar

$$-k\,x^q\,y^p\,z^r\ldots u^s\,v^t$$

entsprechen, in welches das vorige sich verwandelt, wenn x und y vertauscht werden. Die Function wird demnach aus abwechselnd positiven und negativen Gliedern bestehen, welche, paarweise mit einander verbunden, Binomien von der Form

$$k\,x^p\,y^q\,z^r\ldots u^s\,v^t - k\,x^q\,y^p\,z^r\ldots u^s v^t$$

$$= k\,(x^p\,y^q - x^q\,y^p)\,z^r\ldots u^s\,v^t \qquad (3)$$

bilden werden. In jedem Binom dieser Art werden p und q nothwendigerweise zwei von einander verschiedene ganze Zahlen sein müssen, und da die Differenz

$$x^p\,y^q - x^q\,y^p$$

offenbar durch $y-x$ theilbar ist, oder, was dasselbe ist, durch $x-y$; so folgt, daß jedes Binom und folglich auch die Summe der Binomien, oder die vorgelegte Function durch

$$\pm\,(y-x)$$

theilbar sein wird. Da man übrigens in den vorhergehenden Betrachtungen an die Stelle von x, y zwei beliebige andere Veränderliche x und z, oder y und z etc.... setzen kann, so ergeben sich offenbar nachstehende Folgerungen:

1) Eine alternirende, aber ganze Function von mehreren Veränderlichen $x, y\ z \ldots u, v$ besteht aus abwechselnd positiven und negativen Gliedern, in deren jedem die verschiedenen Veränderlichen sämmtlich verschiedene Exponenten haben.

2) Eine solche Function ist theilbar durch das Product der Differenzen

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{r} \pm(y-x),\ \pm(z-x),\ldots \pm(u-x),\ \pm(v-x), \\ \pm(z-y),\ldots \pm(u-y),\ \pm(v-y), \\ \text{etc.}\ldots \pm(u-z),\ \pm(v-z), \\ \text{etc.}\ldots\ldots \\ \pm(v-u), \end{array}\right.$$

(eine jede mit beliebigem Zeichen genommen). Dieses Product ist, wie leicht zu ersehen, selbst eine alternirende Function der Veränderlichen, welche wir betrachten. Um dieses zu beweisen, darf nur gezeigt werden, daß dieses Product sein Zeichen verändert, davon abgesehen aber denselben Werth behält, wenn zwei unter den Veränderlichen, z. B. x und y, mit einander vertauscht werden. Uebrigens ist dieses Product, wenn

(2) $(y-x)(z-x)\ldots(u-x)(v-x)(z-y)\ldots(u-y)(v-y)\ldots(v-u)$
$= \varphi$ gesetzt wird,

entweder gleich $+\varphi$ oder gleich $-\varphi$, je nachdem man einer jeden Differenz das Zeichen $+$ oder $-$ gibt. Nun ist es aber einleuchtend, daß dieser Werth von φ nur in Folge der gegenseitigen Vertauschung der Veränderlichen x und y sein Zeichen ändert; dies wird also auch bei einer Function, welche entweder dem $+\varphi$ oder dem $-\varphi$ gleich ist, der Fall sein müssen.

Um die Sache noch deutlicher zu machen, wollen wir annehmen, eine jede der Differenzen (1) habe das Zeichen $+$. Das Product aller Differenzen wird alsdann die durch die Gleichung (2) bestimmte Function φ sein, oder die mit jener identische Gleichung

(3) $\varphi = (y-x)(z-x)(z-y)\ldots(v-x)(v-y)(v-z)\ldots(v-u)$.

Es sei überdies n die Anzahl der Veränderlichen x, y, z ... u, v; so wird $n-1$ offenbar die Anzahl der Differenzen sein, welche eine und dieselbe Veränderliche enthalten: mithin wird in jedem Gliede der entwickelten und unter die Form eines Polynoms gebrachten Function φ, der Exponent einer beliebigen Veränderlichen die Zahl $n-1$ nicht übersteigen können. Da endlich in jedem Gliede die verschiedenen Veränderlichen mit verschiedenen Exponenten behaftet sein müssen, so ist es einleuchtend, daß diese verschiedenen Exponenten respective den Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \ldots n-1,$$

gleich sein müssen. Jedes Glied wird also, abgesehen vom Zeichen und von seinem Zahlencoefficienten, dem Producte der verschiedenen, in irgend einer Ordnung neben einander geschriebenen und respective auf die Potenzen $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$, (d. h. auf diejenigen Potenzen, deren Exponenten diese Zahlen sind),

erhobenen Veränderlichen gleich sein. Es muß noch hinzugefügt werden, daß jedes Product dieser Art nur einmal, entweder mit dem Zeichen + oder mit dem Zeichen —, in der Entwickelung der Function φ vorkommen wird. Das Product

$$x^{\circ}\, y^{1}\, z^{2} \ldots u^{n-2}\, v^{n-1}$$

z. B. kann nur durch die Multiplication der ersten Buchstaben aller Binomialfactoren, welche den zweiten Theil der Gleichung (3) ausmachen, entstehen.

Mit Hülfe der so eben festgestellten Principien ist es leicht, die Function φ im Ganzen zu entwickeln und ihre verschiedenen Eigenschaften zu untersuchen (s. Note IV.). — Wir wollen gegenwärtig zeigen, wie die Betrachtung einer ähnlichen Entwickelung auf die Auflösung der allgemeinen Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Veränderlichen führt.

Es seien

$$(4)\quad \begin{cases} a_{\circ}x + b_{\circ}y + c_{\circ}z + \ldots + g_{\circ}u + h_{\circ}v = k_{\circ}, \\ a_{1}x + b_{1}y + c_{1}z + \ldots + g_{1}u + h_{1}v = k_{1}, \\ a_{2}x + b_{2}y + c_{2}z = \ldots + g_{2}u + h_{2}v = k_{2}, \\ \quad \text{etc. } \ldots\ldots \\ a_{n-1}.x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots + g_{n-1}u + h_{n-1}v = k_{n-1}, \end{cases}$$

n lineäre Gleichungen zwischen n Veränderlichen oder Unbekannten

$$x,\ y,\ z \ldots u,\ v,$$

und die Constanten

$$\begin{array}{l} a_{\circ},\ b_{\circ},\ c_{\circ} \ldots g_{\circ},\ h_{\circ},\ k_{\circ}, \\ a_{1},\ b_{1},\ c_{1} \ldots g_{1},\ h_{1},\ k_{1}, \\ a_{2},\ b_{2},\ c_{2} \ldots g_{2},\ h_{2},\ k_{2}, \\ \quad \text{etc. } \ldots\ldots \\ a_{n-1},\ b_{n-1},\ c_{n-1} \ldots g_{n-1},\ h_{n-1},\ k_{n-1} \end{array}$$

willkürlich. Es sei, unter andern, P der Werth von φ, welcher den Werthen

$$x = a,\ y = b,\ z = c, \ldots u = g,\ v = h$$ entspricht,

auch wollen wir unter

$$a,\ b,\ c, \ldots g,\ h$$

eben so viele neue Größen verstehen, so daß man erhält

$$(5)\qquad P =$$

$$(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\ldots(h-a)\,(h-b)\,(h-c)\ldots(h-g).$$

Das Product P wird die einfachste alternirende Function der Größen a, b, c ... g, h sein, und wenn man diese Function durch die algebraische Multiplication ihrer Binomialfactoren entwickelt, so wird jedes Glied der Entwickelung, abgesehen vom Zeichen, dem Producte jener, in einer gewissen Ordnung neben einander geschriebenen und respective auf die Potenzen 0, 1, 2, 3, ... n—1 erhobenen Größen gleich sein.

Wir wollen nun annehmen, daß in jedem Gliede statt der Exponenten der Buchstaben Indices (Anzeiger) gesetzt werden, also z. B.

$$a_0\ b_1\ c_2\ \ldots\ g_{n-2}\ h_{n-1}$$

anstatt des Gliedes

$$a^0\ b^1\ c^2\ \ldots\ g^{n-2}\ h^{n-1},$$

und wollen unter D diejenige Größe verstehen, in welche alsdann die Entwickelung des Productes P übergeht. Die Größe D wird offenbar, so gut als das Product P, die Eigenschaft haben, daß sie ihr Zeichen verändert, wenn man zwei der gegebenen Buchstaben, z. B. a und b, unter einander vertauscht. Hieraus läßt sich leicht der Schluß ziehen: daß D sich auf Null reducirt, wenn man in allen seinen Gliedern b statt a setzt, ohne jedoch zugleich a statt b zu setzen. Eben so verhielte es sich, wenn man durchgängig einen der Buchstaben c, ... g, h statt a setzte. Wenn man hierauf in dem Polynom D die Summe der Glieder, deren gemeinschaftlicher Factor a_0 ist, durch $A_0 a_0$, die Summe der Glieder, welche den Factor a_1 enthalten, durch $A_1 a_1$, etc.... und endlich die Summe der Glieder, welche den Factor a_{n-1} enthalten, durch $A_{n-1}\ a_{n-1}$ bezeichnet, so daß der Werth von D durch die Gleichung

$$(6)\quad D = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 \text{ etc.} \ldots + A_{n-1}\ a_{n-1}$$

gegeben ist; so wird man finden, daß, wenn man in dem zweiten Theile dieser Gleichung successive die Buchstaben b, c, ... g, h statt a setzt,

$$(7)\quad \begin{cases} 0 = A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + \text{etc.} \ldots + A_{n-1} b_{n-1}, \\ 0 = A_0 c_0 + A_1 c_1 + A_2 c_2 + \text{etc.} \ldots + A_{n-1} c_{n-1}, \\ \quad \text{etc.} \ldots\ldots \\ 0 = A_0 g_0 + A_1 g_1 + A_2 g_2 + \text{etc.} \ldots + A_{n-1} g_{n-1}, \\ 0 = A_0 b_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \text{etc.} \ldots + A_{n-1} h_{n-1}, \end{cases}$$

ist. Wenn man nun die Gleichungen (4) Glied für Glied addirt, nachdem man die erste durch A_0, die zweite durch A_1, die dritte durch A_2.... und die letzte durch A_{n-1} multiplicirt hat, so werden bei dieser Addition die Coefficienten der Unbekannten y, z... u, v nach den Formeln (7) verschwinden, und man wird folgende Gleichung erhalten

$$Dx = A_0k_0 + A_1k_1 + A_2k_2 + \ldots + A_{n-1}k_{n-1},$$

aus welcher sich ergibt

$$(8)\quad x = \frac{A_0k_0 + A_1k_1 + A_2k_2 + \text{etc.} \ldots + A_{n-1}k_{n-1}}{D}.$$

Da übrigens die erste der beiden Größen

D und $A_0k_0 + A_1k_1 + A_2k_2 + \text{etc.} \ldots + A_{n-1}k_{n-1}$

dasjenige bezeichnet, was aus der Entwickelung des Productes

$(b-a)(c-a)(c-b) \times \ldots \times (h-a)(h-b)(h-c)\ldots(h-g)$

wird, wenn man in dieser Entwickelung Indices an die Stelle der Exponenten setzt; die zweite dagegen dasjenige, was aus der Größe D wird (welche ihrerseits dem zweiten Theile der Formel (6) gleich ist), wenn man darin k statt a setzt, so ist der Werth von x als durch die Gleichung

$$(9)\quad x = \frac{(b-k)(c-k)(c-b)\ldots(h-k)(h-b)(h-c)\ldots(h-g)}{(b-a)(c-a)(c-b)\ldots(h-a)(h-b)(h-c)\ldots(h-g)}$$

gegeben anzusehen; nur muß man allerdings Zähler und Nenner des Bruches zuvörderst entwickeln und sodann in jeder Entwickelung Indices statt der Exponenten setzen. Da der Werth der Gleichung (9), wenn dieselbe buchstäblich genommen wird, nicht genau ist und es erst in Folge der angezeigten Modificationen werden kann, so wollen wir ihn einen symbolischen Werth der Unbekannten nennen und diese Benennung in ähnlichen Fällen beibehalten.

Durch die Methode, durch welche wir den symbolischen Werth von x gefunden haben, kann man auch die der übrigen Unbekannten erhalten. Um diese Methode auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir den Fall setzen, es seien die lineären Gleichungen

$$(10)\quad \begin{cases} a_0x + b_0y + c_0z = k_0, \\ a_1x + b_1y + c_1z = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2, \end{cases}$$

aufzulösen, so wird der symbolische Werth der Unbekannten x,

$$(11)\quad x = \frac{(b-k)\,(c-k)\,(c-b)}{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)}$$

$$= \frac{k^0b^1c^2 - k^0b^2c^1 + k^1b^2c^0 - k^1b^0c^2 + k^2b^0c^1 - k^2b^1c^0}{a^0b^1c^2 - a^0b^2c^1 + a^1b^2c^0 - a^1b^0c^2 + a^2b^0c^1 - a^2b^1c^0},$$

und folglich der wahre Werth von x

$$(12)\quad x = \frac{k_0b_1c_2 - k_0b_2c_1 + k_1b_2c_0 - k_1b_0c_2 + k_2b_0c_1 - k_2b_1c_0}{a_0b_1c_2 - a_0c_2c_1 + a_1b_2c_0 - a_1b_0c_2 + a_2b_0c_1 - a_2b_1c_0}$$

sein.

Anmerkung. Wenn man in den Gleichungen (4) anstatt der Indices der Buchstaben a, b, c ... g, h, k Exponenten setzt, so verwandelt sich offenbar der durch die Gleichung (9) gegebene symbolische Werth von x in den wahren und ist, wie sich auch wohl erwarten ließ, demjenigen Werthe vollkommen gleich, welchen die Formel (3) des §. 1. liefert.

§. 3. Von den homogenen Functionen.

Eine Function von mehreren Veränderlichen x, y, z .... heißt homogen, wenn sie, sobald x in tx, y in ty, z in tz .... verwandelt werden, wo t eine neue, von den anderen unabhängige Veränderliche ist, im Verhältniß von Eins zu einer bestimmten Potenz von t ihren Werth ändert; der Exponent dieser Potenz heißt der Grad der homogenen Function.

Mit andern Worten:

$$f(x, y, z...)$$

ist eine homogene Function vom Grade a, in Beziehung auf die Veränderlichen x, y, z..., wenn für jeden beliebigen Werth von t

$$(1)\quad f(tx, ty, tz...) = t^a f(x, y, z...)$$

ist. So z. B. sind

$$x^2 + xy + y^2,\ \sqrt{xy},\ ly - lx,$$

drei homogene Functionen der Veränderlichen x und y, die erste vom zweiten Grade, die zweite vom ersten, die dritte vom Grade 0. Eine ganze Function der Veränderlichen x, y, z..., welche aus Gliedern besteht, in deren jedem die Summe der Exponenten der verschiedenen Veränderlichen eine und dieselbe ist, ist offenbar homogen.

Wenn man in der Formel (1) $t = \frac{1}{x}$ setzt, so ergibt sich

$$(2) \qquad f(x, y, z\ldots) = x^a f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\ldots\right).$$

Diese Gleichung drückt eine Eigenschaft der homogenen Functionen aus, welche auf folgende Weise in Worten angegeben werden kann:

Wenn eine Function mehrerer Veränderlichen x, y, z... homogen ist, so ist sie dem Producte einer gewissen Potenz irgend einer der Veränderlichen durch eine Function der Verhältnisse zwischen je zweien dieser Veränderlichen gleich. Es kann noch hinzugefügt werden, daß diese Eigenschaft den homogenen Functionen ausschließlich zukommt. — Denn angenommen, f (x, y, z...) sei dem Producte von x^a durch eine Function der Verhältnisse zwischen je zweien der Veränderlichen x, y, z... gleich, so wird man alle diese Verhältnisse vermittelst derjenigen ausdrücken können, deren Nenner x ist, indem man z. B. statt $\frac{z}{y}$

$$\frac{\left(\frac{z}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)}$$

schreibt. Der Werth von f (x, y, z...) wird demnach durch eine Gleichung von der Form

$$f(x, y, z\ldots) = x^a \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\ldots\right)$$

gegeben sein. Diese Gleichung wird auch dann noch gelten,

wenn man tx statt x, ty statt y, tz statt z... setzt, wobei es ganz gleichgültig ist, welche Werthe x, y, z... haben. Man erhält alsdann

$$f(tz, ty, tz...) = t^n x^a \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}...\right);$$

mithin auch der Annahme gemäß, unabhängig von jedem Werthe von t,

$$f(tx, ty, tz...) = t^n f(x, y, z...);$$

mit andern Worten:

$$f(x, y, z...)$$

wird eine homogene Function vom Grade a in Beziehung auf die Veränderlichen x, y, z... sein.

Viertes Capitel.

Bestimmung ganzer Functionen aus einer gewissen Anzahl als bekannt vorausgesetzter besonderen Werthe. Beispiele der Anwendung.

---

§. 1. Bestimmung der ganzen Functionen mit einer Veränderlichen, von welchen man eine gewisse Anzahl besonderer Werthe kennt.

Eine Function aus einer gewissen Anzahl von besonderen, als bekannt vorausgesetzten Werthen ableiten, heißt *interpoliren*. Ist die Rede von einer Function mit einer oder zwei Veränderlichen, so kann diese Function als Ordinate einer Curve oder Oberfläche angesehen werden, und das Problem der Interpolation besteht darin, den allgemeinen Werth dieser Ordinate zu bestimmen, wenn eine gewisse Anzahl von besonderen Werthen gegeben ist, d. h., die Curve oder die Oberfläche durch eine gewisse Anzahl von Puncten gehen zu lassen. Diese Aufgabe kann auf unendlich viele Arten aufgelöst werden, und im Allgemeinen ist das Problem der Interpolation unbestimmt. Jedoch fällt die Unbestimmtheit weg, wenn man ausdrücklich festsetzt, daß die Function eine ganze und von *dem* Grade sein soll, daß die Anzahl ihrer Glieder genau der Anzahl der gegebenen besonderen Werthe gleich sei. Wir wollen z. B. annehmen, es sei zuvörderst von den Functionen mit einer einzigen Veränderlichen x die Rede, so werden sich, in Beziehung auf diese, sehr leicht folgende Sätze ergeben.

Lehrsatz 1. Wenn eine ganze Function der Veränderlichen x für einen besonderen Werth dieser Veränderlichen verschwindet, z. B. für $x = x_0$, so ist sie durch $x - x_0$ algebraisch theilbar.

Lehrsatz 2. Wenn eine ganze Function der Veränderlichen x für jeden Werth von x, welcher in der Reihe

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$$

enthalten ist (wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet), so ist sie nothwendig durch das Product

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}$$

theilbar.

Es seien nun $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei ganze Functionen der Veränderlichen x, beide vom Grade $n-1$, und beide für jeden der n besonderen Werthe von x, welche in der Reihe x_0, $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$ vorkommen, von gleichem Werthe, so behaupte ich: daß diese beiden Functionen identisch sein müssen, so daß man also für jeden beliebigen Werth von x, haben muß

$$\varphi(x) = \psi(x).$$

Wenn nämlich diese Gleichheit nicht stattfände, so würde die Differenz

$$\psi(x) - \varphi(x)$$

ein ganzes Polynom sein, dessen Grad $n-1$ nicht übersteigen könnte, und welches dennoch, da es für jeden der eben erwähnten Werthe von x verschwindet, durch

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}),$$

d. h. durch ein Polynom vom n^{ten} Grade theilbar wäre, was offenbar ungereimt ist. Man würde also a fortiori von der absoluten Gleichheit der beiden Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ überzeugt sein, wenn man wüßte, daß sie für mehr als n Werthe einander gleich werden. Mithin kann folgender Satz aufgestellt werden:

Lehrsatz 3. Wenn zwei ganze Functionen der Veränderlichen x, für eine Anzahl von Werthen dieser Veränderlichen, welche den Grad einer jeden

von beiden Functionen übersteigt, einander gleich werden, so sind sie identisch.

Hieraus ergibt sich als unmittelbare Folge dieser Satz:

Lehrsatz 4. Zwei ganze Functionen der Veränderlichen x, sind jederzeit identisch, wenn sie für beliebige ganze Werthe dieser Veränderlichen, oder selbst für alle ganzen Werthe, die eine gewisse Grenze übersteigen, einander gleich sind.

In diesem Falle ist die Anzahl der Werthe von x, für welche die beiden Functionen gleich werden, unbestimmt.

Aus dem dritten Lehrsatze folgt, daß eine ganze Function u vom Grade $n-1$ völlig bestimmt ist, wenn man ihre besonderen Werthe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_{n-1},$$

welche den Werthen der Veränderlichen x

$$x_0,\ x_1,\ x_2\ \ldots\ x_{n-1}$$

entsprechen, kennt. Wir wollen unter dieser Annahme den allgemeinen Werth der Function u suchen. Angenommen, daß die besonderen Werthe $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ sich alle, mit Ausnahme von u_0, auf Null reduciren, so wird die Function u, da sie für $x=x_1$, für $x=x_2$.... und endlich für $x=x_{n-1}$ verschwinden muß, durch das Product

$$(x-x_1)\,(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_{n-1})$$

theilbar und folglich von der Form

$$u = k\,(x-x_1)\,(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_{n-1})$$

sein, wo k durchaus eine Constante sein muß; denn da u sich auf u_0 reduciren muß, wenn $x=x_0$, so hat man

$$u_0 = k\,(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)\ \ldots\ (x_0-x_{n-1});$$

mithin auch

$$u = u_0 \cdot \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)\ \ldots\ (x^0-x_{n-1})}.$$

Eben so findet man, wenn die besonderen Werthe $u_0, u_1, u_2 \ldots u_{n-1}$ sich alle, bis auf u_1, auf Null reduciren,

$$u = u_1 \cdot \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)\ \ldots\ (x_1-x_{n-1})}.$$

etc. .....

Wenn sie endlich alle, mit Ausnahme von u_{n-1}, sich auf Null reduciren, so findet man

$$u = u_{n-1} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1) \ldots (x_{n-1} - x_{n-2})}.$$

Wenn man die verschiedenen Werthe von u, welche den verschiedenen, so eben gemachten Hypothesen entsprechen, durch Addition verbindet, so wird die Summe ein Polynom in x vom Grade $n-1$ sein, welches offenbar sich auf u_0 reducirt, wenn $x = x_0$, auf u_1, wenn $x = x_1$, etc.... auf u_{n-1}, wenn $x = x_{n-1}$ ist. Dieses Polynom wird demnach der allgemeine Werth von u sein, und die vorgelegte Aufgabe wäre also gelöst, indem dieser allgemeine Werth durch die Formel

$$(1)\quad u = u_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_{n-1})}$$
$$+ u_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_{n-1})}$$
$$+ \text{etc.} \ldots\ldots$$
$$+ u_{n-1} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1) \ldots (x_{n-1} - x_{n-2})}$$

ausgedrückt wird. — Man könnte dieselbe Formel auch aus der Methode herleiten, deren wir uns oben (Cap. 3. §. 1.) bedient haben, um in einem besonderen Falle lineare Gleichungen mit mehreren Veränderlichen aufzulösen (s. Note V.).

— Wenn man unter a eine constante Größe versteht und in der Formel (1) $u - a$ für u substituirt, eine Function, welche offenbar von demselben Grade ist, und wenn man eben so, statt der besonderen Werthe von u, die besonderen Werthe $u - a$ setzt, so wird man die Gleichung

$$(2)\quad u - a = (u_0 - a)\frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_{n-1})}$$
$$+ (u_1 - a)\frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_{n-1})}$$
$$+ \text{etc.} \ldots\ldots$$
$$+ (u_{n-1} - a)\frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1) \ldots (x_{n-1} - x_{n-2})}$$

erhalten, und wenn man diese Gleichung mit der Formel (1) vergleicht, so wird man die folgende finden

$$(3)\quad 1 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})}$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})}$$
$$+\text{ etc.}\ldots\ldots$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}.$$

Diese letztere Gleichung ist identisch und gilt unabhängig von jedem besonderen Werthe von x.

Man kann sich einer jeden der beiden Gleichungen (1) und (2) zur Auflösung des Problems der Interpolation bei ganzen Functionen bedienen; jedoch pflegt man der Gleichung (2) in diesem Falle den Vorzug zu geben, indem man alsdann ein Glied des zweiten Theils verschwinden lassen kann, wenn man die Constante a einer der Größen

$$u_0,\ u_1,\ u_2\ldots u_{n-1}$$

gleichsetzt. — Angenommen z. B., es sei von einer geraden Linie die Rede, welche durch zwei gegebene Puncte gehen soll, deren rechtwinklige Coordinaten wir respective durch x_0, y_0 und x_1, y_1 bezeichnen wollen, und y sei die veränderliche Ordinate der geraden Linie; so ergibt sich aus der Formel (2), wenn darin für u der Buchstabe y geschrieben, und sodann $n = 2$, und $a = y_0$ gesetzt wird, die Gleichung der geraden Linie

$$(4)\quad y - y_0 = (y_1 - y_0)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

Wir wollen ferner annehmen, es sei von einer Parabel die Rede, welche durch drei gegebene Puncte gehen, und deren Axe mit der Axe der y parallel laufen soll. Es seien x_0 und y_0, x_1 und y_1, x_2 und y_2 die rechtwinkligen Coordinaten der drei Puncte; ferner sei y die variable Ordinate der Parabel. Setzt man auch hier in der Formel (2) den Buchstaben y für u und macht sodann $n = 2$ und $a = y_1$, so findet man die Gleichung für die Parabel

$$(5)\quad y-y_1 = (y_0-y_1)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + (y_2-y_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

oder, was daſſelbe iſt,

$$(6)\quad y-y_1 = \frac{x-x_1}{x_2-x_0}\left[(y_0-y_1)\frac{x-x_2}{x_1-x_0} + (y_2-y_1)\frac{x-x_0}{x_2-x_1}\right].$$

Wenn man in der Gleichung (1) $u = x^m$ ſetzt (wo m eine ganze Zahl, aber kleiner als n iſt), ſo reduciren ſich die durch

$$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots u_{n-1}$$

bezeichneten beſonderen Werthe von u offenbar auf

$$x_0^m,\ x_1^m,\ x_2^m \ldots x_{n-1}^m.$$

Man hat folglich für ganze Werthe von m, welche $n-1$ nicht überſteigen,

$$(7)\quad x^m = x_0^m \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x-x_{n-1})} + x_1^m \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} + \text{etc.} \ldots\ldots + x_{n-1}^m \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}.$$

Dieſe Formel begreift auch als beſonderen Fall die Gleichung (3) in ſich. Wenn man überdies erwägt, daß jede Potenz, alſo auch x^{n-1} in beiden Theilen der Gleichung (7) einerlei Coefficienten haben muß, ſo wird man finden:

1ſtens. Wenn $m < n-1$ angenommen wird,

$$(8)\quad 0 = \frac{x_0^m}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} + \frac{x_1^m}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} + \text{etc.} \ldots\ldots + \frac{x_{n-1}^m}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})};$$

2tens. Wenn $m = n-1$ angenommen wird,

$$(9) \quad 1 = \frac{x_0^{n-1}}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} + \frac{x_1^{n-1}}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} + \text{etc.}\ldots\ldots + \frac{(x_{n-1})^{n-1}}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}.$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Formel (8) selbst dann gilt, wenn man $m = 0$ annimmt und alsdann übergeht in

$$(10) \quad 0 = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} + \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})} + \text{etc.}\ldots\ldots + \frac{1}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}.$$

§. 2. Bestimmung ganzer Functionen von mehreren Veränderlichen aus einer gewissen Anzahl als bekannt vorausgesetzter besonderer Werthe.

Die Methoden, durch welche man die Functionen mit einer einzigen Veränderlichen bestimmt, wenn man eine gewisse Anzahl von besonderen Werthen als bekannt voraussetzt, können, wie gezeigt werden wird, viel weiter ausgedehnt und auf Functionen von mehreren Veränderlichen angewandt werden.

Wir wollen zuvörderst, um unseren Betrachtungen eine größere Bestimmtheit zu geben, Functionen von zwei Veränderlichen x und y betrachten. — Es seien $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ zwei Functionen dieser Art, beide vom Grade $n-1$ in Beziehung auf jede der Veränderlichen, und von gleichem Werthe, so oft die Veränderliche x einen der besonderen Werthe

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots. \quad x_{n-1}$$

hat, die Veränderliche y aber gleichzeitig einen der folgenden

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \ldots. \quad y_{n-1}.$$

$\varphi(x_0, y)$, $\psi(x_0, y)$ werden zwei Functionen von y allein sein, welche für n besondere Werthe dieser Veränderlichen einander gleich werden. Nach dem dritten Lehrsatze §. 1. werden diese Functionen für jeden Werth von y beständig gleich sein; folglich ist

$$\varphi(x_0, y) = \psi(x_0, y).$$

Eben so findet man

$$\varphi(x_1, y) = \psi(x_1, y),$$
$$\varphi(x_2, y) = \psi(x_2, y),$$
$$\text{etc. .....}$$
$$\varphi(x_{n-1}, y) = \psi(x_{n-1}, y).$$

Uebrigens sind die ersten Theile der n vorhergehenden Gleichungen eben so viele besondere Werthe von $\varphi(x, y)$, für den Fall, daß x allein darin als veränderlich angesehen wird, die zweiten Theile dagegen die den erstern entsprechenden besonderen Werthe der Function $\psi(x, y)$. Wenn man y einer willkürlichen Constante gleichsetzt, so werden die beiden Functionen

$$\varphi(x, y), \quad \psi(x, y)$$

für n verschiedene Werthe von x einander gleich sein, und da sie beide vom Grade $n-1$ in Beziehung auf x sind, so folgt: daß sie nicht allein für einen beliebigen Werth von y, sondern auch für irgend einen Werth von x gleich sein werden. Man könnte also a fortiori von der Gleichheit der beiden Functionen $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ überzeugt sein, wenn man wüßte, daß sie jedesmal einander gleich sind, so oft die Werthe von x und y Glieder von zwei aus mehr als n Gliedern bestehenden Reihen sind. Man kann mithin folgenden Satz aufstellen:

Lehrsatz 1. Wenn zwei ganze Functionen der Veränderlichen x und y einander jedesmal gleich werden, so oft die Werthe der beiden Veränderlichen respective aus zwei Reihen genommen werden, deren Gliederzahl größer ist, als die höchsten Exponenten von x und y in den Functionen selbst; so sind sie identisch.

Hieraus ergibt sich folgender Satz als unmittelbare Folge:

Lehrsatz 2. Zwei ganze Functionen der Veränderlichen x und y sind identisch, so oft sie für beliebige ganze Werthe dieser Veränderlichen, oder für alle ganzen Werthe, welche eine gewisse Grenze übersteigen, einander gleich werden.

In diesem Falle ist die Anzahl der Werthe von x und y, für welche beide Functionen einander gleich werden, unbestimmt.

Aus Lehrsatz 1. folgt: daß eine ganze Function $\varphi(x, y)$, vom Grade $n-1$, in Beziehung auf jede der Veränderlichen x und y, völlig bestimmt sein wird, sobald man ihre besonderen Werthe kennt, welche einem der Werthe

$$x_0, \; x_1, \; x_2, \; \ldots \; x_{n-1}$$

und zugleich einem der Werthe

$$y_0, \; y_1, \; y_2, \; \ldots \; y_{n-1}$$

entsprechen. Es ist in diesem Falle sehr leicht, den allgemeinen Werth der Function aus der Formel (1) des vorhergehenden Paragraphen abzuleiten. Wenn man nämlich in dieser Formel für u, $\varphi(x, y)$ setzt, so erhält man

$$(1)\begin{cases} \varphi(x,y) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})}\cdot\varphi(x_0,y) \\ \quad + \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})}\cdot\varphi(x_1,y) \\ \quad + \text{etc.} \ldots\ldots \\ \quad + \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}\cdot\varphi(x_{n-1},y), \end{cases}$$

und wenn man unter m eine von den Zahlen

$$1, \; 2, \; 3, \; 4, \; \ldots \; n-1$$

versteht, auch

$$(2)\begin{cases} \varphi(x_m,y) = \dfrac{(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_{n-1})}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)\ldots(y_0-y_{n-1})}\varphi(x_m,y_0) \\ \quad + \dfrac{(y-y_0)(y-y_2)\ldots(y-y_{n-1})}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)\ldots(y_1-y_{n-1})}\varphi(x_m,y_1) \\ \quad + \text{etc.} \ldots\ldots \\ \quad + \dfrac{(y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_{n-2})}{(y_{n-1}-y_0)(y_{n-1}-y_1)\ldots(y_{n-1}-y_{n-2})}\varphi(x_m,y_{n-1}). \end{cases}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich sofort der allgemeine Werth von $\varphi(x, y)$. Wenn man z. B. $n = 2$ setzt, so findet man:

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi(x,y) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\dfrac{y-y_1}{y_0-y_1}\cdot\varphi(x_0,y_0) \\ \quad + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\dfrac{y-y_1}{y_0-y_1}\cdot\varphi(x_1,y_0) \\ \quad + \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}\cdot\varphi(x_0,y_1) \\ \quad + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}\cdot\varphi(x_1,y_1). \end{cases}$$

Wenn man Functionen von dreien oder mehreren Veränderlichen untersuchte, so würde man Resultate erhalten, welche den so eben für nur zwei Veränderliche gefundenen vollkommen ähnlich wären. Man würde z. B. folgenden Satz finden, welcher dem zweiten Lehrsatze entspricht.

Lehrsatz 3. Zwei Functionen von mehreren Veränderlichen $x, y, z \ldots$ sind identisch, so oft sie für beliebige ganze Werthe dieser Veränderlichen oder für alle ganzen Werthe, welche eine gegebene Grenze übersteigen, einander gleich sind.

§. 3. Beispiele der Anwendung.

Um die in den vorhergehenden Paragraphen festgestellten Principien anwenden zu können; wollen wir einmal die Producte betrachten, welche durch die successive Multiplication mit Factoren entstehen, von welchen jeder um Eins größer ist, als der auf ihn folgende, während der erste Factor eine der Veränderlichen $x, y, z \ldots$ ist; und wir wollen alle ähnlichen Producte, deren erster Factor die Summe der gegebenen Veränderlichen, also

$$x + y + z \ldots$$

ist, durch Producte der ersten Art auszudrücken versuchen. Beschränkt man die Anzahl der Veränderlichen auf zwei, so wird die Aufgabe folgende sein:

Aufgabe 1. Es soll das Product

(1) $(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\ldots(x+y-n+1)$,

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, durch die Producte

$$x\,(x-1)\,(x-2)\ldots(x-n+1),$$
$$y\,(y-1)\,(y-2)\ldots(y-n+1),$$

und alle diejenigen, welche durch bloße Veränderung des Werthes von n aus diesen abgeleitet werden können, ausgedrückt werden.

Auflösung. Um die vorliegende Aufgabe leichter auflösen zu können, wollen wir zuvörderst annehmen, daß x und y ganze Zahlen und gleich oder größer als n sind. In diesem Falle wird das Product (1) nichts weiter als der Zähler des Bruches sein, welcher die Anzahl der Combinationen von der Classe n bei $x+y$ Elementen ausdrückt; denn diese Anzahl ist genau

$$\frac{(x+y)\,(x+y-1)\,(x+y-2)\ldots(x+y-n+1)}{1.\,2.\,3.\,4\ldots n}.$$

Gesetzt, die Anzahl der Buchstaben

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ p,\ q,\ r\ \ldots$$

sei $x+y$, so wollen wir sie in zwei Gruppen theilen, so, daß die Anzahl der Buchstaben a, b, c ... von der ersten Gruppe gleich x, die der Buchstaben p, q, r, ... von der zweiten Gruppe gleich y sei. Es werden unter den sämmtlichen Combinationen aller Buchstaben auch solche sich befinden, welche nur Buchstaben der ersten Gruppe enthalten. Die Anzahl der Combinationen dieser Art wird

$$\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.\,2.\,3\ldots n}$$

sein. Andere werden $n-1$ Buchstaben der ersten Gruppe und einen aus der zweiten enthalten. Die Anzahl der Combinationen dieser Art ist leicht zu bestimmen und, wie man sich leicht überzeugen kann, gleich

$$\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.\,2.\,3\ldots(n-1)}\cdot\frac{y}{1};$$

Desgleichen wird die Anzahl der Combinationen, welche $n-2$ Buchstaben der ersten und 2 Buchstaben der zweiten Gruppe enthalten, gleich

$$\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\ldots(x-n+3)}{1.\,2.\,3\ldots(n-2)}\cdot\frac{y\,(x-1)}{1.\,2}$$

sein etc....; die Anzahl der Combinationen endlich, welche nur Buchstaben der zweiten Gruppe enthalten,

$$\frac{y\,(y-1)\,(y-2)\ldots(y-n+1)}{1.\,2.\,3\ldots n}.$$

Da die Gesammtzahl aller dieser Combinationen der Anzahl der Combinationen von der Classe n bei $x+y$ Elementen gleich sein muß, so ist also

$$(2)\begin{cases}\dfrac{(x+y)\,(x+y-1)\ldots(x+y-n+1)}{1.\,2.\,3\ldots n}\\ =\dfrac{x\,(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.\,2.\,3\ldots n}+\dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{1.\,2.\,3\ldots(n-1)}\cdot\dfrac{y}{1}\\ +\dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+3)}{1.\,2.\,3\ldots(n-2)}\cdot\dfrac{y\,(y-1)}{1.\,2}+\text{etc.}\ldots\\ +\dfrac{x}{1}\cdot\dfrac{y(y-1)\ldots(y-n+2)}{1.\,2.\,3\ldots(n-1)}+\dfrac{y(y-1)\ldots(y-n+1)}{1.\,2.\,3\ldots n}.\end{cases}$$

Diese Gleichung wird, obgleich wir bei unserer Untersuchung nur ganze Werthe, und zwar größer als n, für x und y vorausgesetzt haben, nach Lehrsatz 2. (§. 2.) für beliebige Werthe dieser Veränderlichen gelten; und der aus (2) abgeleitete Werth des Productes (1) wird

$$(3)\begin{cases}(x+y)\,(x+y-1)\ldots(x+y-n+1)\\ =x\,(x-1)\ldots(x-n+1)+\dfrac{n}{1}\cdot x\,(x-1)\ldots(x-n+2)\cdot y\\ +\dfrac{n\,(n-1)}{1.\,2}\cdot x\,(x-1)\ldots(x-n+3)\cdot y\,(y-1)+\text{etc.}\ldots\\ +\dfrac{n}{1}\cdot x\cdot y(y-1)\ldots(y-n+2)+y(y-1)\ldots(y-n+1)\end{cases}$$

sein.

Zusatz 1. Wenn in der Gleichung (2) $-x$ für x, und $-y$ für y gesetzt wird, so erhält man folgende

$$(4)\begin{cases} \dfrac{(x+y)(x+y+1)\ldots(x+y+n-1)}{1.2.3\ldots n} \\ = \dfrac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{1.2.3\ldots n} + \dfrac{x(x+1)\ldots(x+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \dfrac{y}{1} \\ + \dfrac{x(x+1)\ldots(x+n-3)}{1.2.3\ldots(n-2)} \cdot \dfrac{y(y+1)}{1.2} + \text{etc.}\ldots\ldots \\ + \dfrac{x}{1} \cdot \dfrac{y(y+1)\ldots(y+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \dfrac{y(y+1)\ldots(y+n-1)}{1.2.3\ldots n}. \end{cases}$$

Zusatz 2. Setzt man in der Gleichung (2), $\frac{x}{2}$ für x und $\frac{y}{2}$ für y, so findet man

$$(5)\begin{cases} \dfrac{(x+y)(x+y-2)\ldots(x+y-2n+2)}{2.4.6\ldots(2n)} \\ = \dfrac{x(x-2)\ldots(x-2n+2)}{2.4.6\ldots(2n)} + \dfrac{x(x-2)\ldots(x-2n+4)}{2.4.6\ldots(2n-2)} \cdot \dfrac{y}{1} \\ + \text{etc.}\ldots\ldots \\ + \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{y(y-2)\ldots(y-2n+4)}{2.4.6\ldots(2n-2)} + \dfrac{y(y-2)\ldots(y-2n+2)}{2.4.6\ldots(2n)}. \end{cases}$$

Zusatz 3. Entwickelt man beide Theile der Gleichung (2), und behält man auf beiden Seiten nur diejenigen Glieder bei, in welchen die Summe der Exponenten der Veränderlichen gleich n ist, so erhält man die Formel

$$(6)\begin{cases} \dfrac{(x+y)^n}{1.2.3\ldots n} = \dfrac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \dfrac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \dfrac{y}{1} \\ + \dfrac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} \cdot \dfrac{y^2}{1.2} + \text{etc.}\ldots\ldots \\ + \dfrac{x}{1} \cdot \dfrac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \dfrac{y^n}{1.2.3\ldots n}. \end{cases}$$

Der Werth von $(x+y)^n$, wie ihn diese Formel gibt, ist genau derselbe, welchen man nach dem binomischen Satze erhält.

Die Formeln, welche wir so eben erhalten haben, können sehr leicht auf den Fall ausgedehnt werden, wo man es mit mehreren Veränderlichen zu thun hat, und die Methode, nach,

welcher wir das erste Problem aufgelöst haben, ist eben so anwendbar bei folgender Untersuchung:

Aufgabe 2. Wenn x, y, z... Veränderliche (in beliebiger Anzahl) sind, so soll das Product

$$(x+y+z...)(x+y+z...-1)(x+y+z...-2)...(x+y+z...-n+1)$$

als Function der folgenden

$$x\,(x-1)\,(x-2)...(x-n+1),$$
$$y\,(y-1)\,(y-2)...(y-n+1),$$
$$z\,(z-1)\,(z-2)...(z-n+1),$$
$$\text{etc.}.....$$

und aller derjenigen, welche durch bloße Veränderung des Werthes von n aus ihnen abgeleitet werden können, ausgedrückt werden.

Man wird damit anfangen, das Problem für den Fall aufzulösen, wo x, y, z... ganze Zahlen und größer als n sind, und dabei von dem Principe ausgehen, daß der Bruch

$$\frac{(x+y+z...)(x+y+z...-1)(x+y+z...-2)...(x+y+z...-n+1)}{1.\,2.\,3...\,n}$$

der Anzahl der Combinationen n^{ter} Classe bei $x+y+z...$ Elementen gleich ist. Sodann wird man zu dem Falle übergehen, wo die Veränderlichen x, y, z... beliebige Größen sind, wobei man sich auf Lehrsatz 3. des §. 2. stützt. Wenn man auf diese Weise die Formel entwickelt hat, welche als Auflösung der vorgelegten Aufgabe anzusehen ist, so wird man aus ihr ohne Mühe den Werth von

$$(x+y+z...)^n$$

ableiten können, indem man beide Theile der gefundenen Gleichung entwickelt und auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nur diejenigen Glieder beibehält, in welchen die Summe der Exponenten von x, y, z... gleich n ist.

Fünftes Capitel.

Bestimmung der stetigen Functionen mit einer einzigen Veränderlichen, welche gewissen Bedingungen Genüge leisten sollen.

§. 1. Es wird eine stetige Function gesucht, von der Beschaffenheit, daß die Summe oder das Product zweier ähnlichen Functionen irgendwelcher Veränderlichen eine ähnliche Function der Summe oder des Productes dieser Veränderlichen ist.

Betrachtet man, statt ganzer Functionen, irgendwelche Functionen, deren Form man auf keine Weise bestimmt, so ist es nicht mehr allgemein möglich, dieselben aus einer gewissen Anzahl besonderer Werthe abzuleiten, wie groß auch immerhin diese Anzahl sein mag; aber je zuweilen erreicht man diesen Zweck, wenn man gewisse allgemeine Eigenschaften der gesuchten Functionen als bekannt annimmt. So kann z. B. eine stetige Function von x, welche wir durch $\varphi(x)$ bezeichnen wollen, völlig bestimmt werden, wenn sie, für alle möglichen Werthe von x, einer der beiden Gleichungen

$$(1) \qquad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$(2) \qquad \varphi(x+y) = \varphi(x) \times \varphi(y),$$

oder, für alle reellen und positiven Werthe von x und y, einer der beiden Gleichungen

$$(3) \qquad \varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$(4) \qquad \varphi(xy) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

Genüge leistet. — Die Auflösung dieser vier Gleichungen bietet vier verschiedene Probleme dar, welche wir der Reihe nach auflösen wollen.

Aufgabe 1. Es soll die Function $\varphi(x)$ also bestimmt werden, daß sie zwischen zweien beliebigen Grenzen von x stetig ist, und daß man für alle reellen Werthe der Veränderlichen x und y beständig hat

$$(1) \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Auflösung. Wenn man in der Gleichung (1) successive $y+z$ für y, $z+u$ für z etc. ... substituirt, so erhält man

$$\varphi(x+y+z+u\ldots) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) + \varphi(u) + \text{etc.}\ldots,$$

wo die Anzahl der Veränderlichen x, y, z, u... nichts zur Sache thut. Wenn man ferner diese Anzahl durch m bezeichnet, unter α aber eine constante Größe versteht, und hierauf

$$x = y = z = u \ldots = \alpha$$

setzt, so verwandelt sich die letzte Formel in

$$\varphi(m\alpha) = m\varphi(\alpha).$$

Soll diese letztere Formel auch den Fall in sich begreifen, wo ein Bruch $\frac{m}{n}$, oder sogar eine beliebige Zahl an die Stelle der ganzen Zahl m tritt, so wird man im ersten Falle

$$\beta = \frac{m}{n}\alpha$$

setzen (wo m und n zwei ganze Zahlen sind), und erhält dann

$$n\beta = m\alpha,$$

$$n\varphi(\beta) = m.\varphi(\alpha),$$

$$\varphi(\beta) = \varphi\left(\frac{m}{n}\alpha\right) = \frac{m}{n}\varphi(\alpha).$$

Gesetzt, $\frac{m}{n}$ sei veränderlich und nähere sich einer beliebigen Zahl μ, so wird man, wenn man diese Grenze nimmt, erhalten

$$\varphi(\mu\alpha) = \mu\varphi(\alpha).$$

Setzt man nun $\alpha = 1$, so erhält man für alle positiven Werthe von μ

(5) $\varphi(\mu) = \mu\varphi(1)$,

und, wenn man μ sich der Grenze Null nähern läßt,

$$\varphi(0) = 0.$$

Wenn man in der Gleichung (1), $x = \mu$, $y = -\mu$ setzt, so erhält man

$$\varphi(-\mu) = \varphi(0) - \varphi(\mu) = -\mu\varphi(1).$$

Die Gleichung (5) wird also auch dann noch gelten, wenn darin μ in $-\mu$ verwandelt wird; mit andern Worten, man hat für beliebige positive oder negative Werthe von x

(6) $\varphi(x) = x\varphi(1)$.

Aus der Formel (6) folgt, daß jede Function $\varphi(x)$, welche zwischen beliebigen Grenzen der Veränderlichen stetig ist und der Gleichung (1) Genüge leistet, nothwendig von der Form

(7) $\varphi(x) = ax$

ist, wo a eine constante Größe bezeichnet. Das Product ax ist in der That, zwischen beliebigen Grenzen von x, eine stetige Function dieser Veränderlichen; auch verwandelt die Annahme $\varphi(x) = ax$ die Gleichung (1) in folgende

$$a(x+y) = ax + ay,$$

welche offenbar beständig identisch ist. Die Formel (7) bietet also eine Auflösung der vorgelegten Aufgabe dar, gleichviel übrigens, welchen Werth man der Constanten a gibt. Man nennt diese Constante eine willkürliche, weil es freisteht, dieselbe willkürlich zu wählen.

Aufgabe 2. Es soll die Function $\varphi(x)$ dergestalt bestimmt werden, daß sie zwischen zweien beliebigen, reellen Grenzen der Veränderlichen x stetig ist, und daß man, für alle reellen Werthe der Veränderlichen x und y,

(2) $\varphi(x+y) = \varphi x \,.\, \varphi(y)$ hat.

Auflösung. Es ist zuvörderst leicht einzusehen, daß $\varphi(x)$, insofern diese Function der Gleichung (1) Genüge leisten soll, nur positive Werthe zuläßt. Wenn man nämlich in der Gleichung (2), $y = x$ setzt, so wird man finden

$$\varphi(2x) = [\varphi(x)]^2;$$

und wenn man sodann $\frac{1}{2}x$ für x substituirt,

$$\varphi(x) = [\varphi(\tfrac{1}{2}x)]^2.$$

$\varphi(x)$ ist also beständig dem Quadrate einer reellen Größe gleich, mithin beständig positiv. Setzt man nun in der Gleichung (2) successive $y + z$ für y, $z + u$ für z, etc...., so erhält man

$$\varphi(x+y+z+u\ldots) = \varphi(x).\varphi(y).\varphi(z).\varphi(u)\ldots,$$

wo die Anzahl der Veränderlichen x, y, z, u... nichts zur Sache thut. Wenn man ferner durch m diese Anzahl bezeichnet, durch α dagegen eine beliebige positive Constante, und wenn man

$$x = y = z = u \ldots = \alpha$$

setzt, so verwandelt sich die so eben gefundene Formel in

$$\varphi(m\alpha) = [\varphi(\alpha)]^m.$$

Soll diese Formel auch den Fall in sich begreifen, wo ein Bruch $\frac{m}{n}$, oder eine beliebige Zahl μ an die Stelle der ganzen Zahl m tritt, so setze man im ersten Falle

$$\beta = \frac{m}{n}\alpha,$$

wo m und n zwei ganze Zahlen bezeichnen, und man erhält

$$n\beta = m\alpha,$$

$$[\varphi(\beta)]^n = [\varphi(\alpha)]^m,$$

$$\varphi(\beta) = \varphi\left(\frac{m}{n}a\right) = [\varphi(\alpha)]^{\frac{m}{n}}.$$

Gesetzt nun, der Bruch $\frac{m}{n}$ ändere beständig seinen Werth und nähere sich einer beliebigen Zahl μ, so findet man, wenn man diese Grenze nimmt,

$$\varphi(\mu\alpha) = [\varphi(\alpha)]^\mu.$$

Setzt man nun $\alpha = 1$, so erhält man für alle positiven Werthe von μ

$$(8) \qquad \varphi(\mu) = [\varphi(1)]^\mu,$$

folglich, wenn man $\mu = 0$ setzt,

$$\varphi(0) = 1.$$

Setzt man nun in der Gleichung (2), $x = \mu$, $y = -\mu$, so erhält man

$$\varphi(-\mu) = \frac{\varphi(0)}{\varphi(\mu)} = [\varphi(1)]^{-\mu}.$$

Die Gleichung (8) wird demnach auch dann gelten, wenn man darin μ in $-\mu$ verwandelt, mit andern Worten, man hat für beliebige positive oder negative Werthe von x die Gleichung

$$(9) \qquad \varphi(x) = [\varphi(1)]^x.$$

Aus der Gleichung (9) folgt: daß jede Function $\varphi(x)$, welche die verlangten Eigenschaften haben soll, nothwendig von der Form

$$(10) \qquad \varphi(x) = A^x$$

ist, wo A eine positive Constante ist. Ich bemerke noch, daß man dieser Constanten einen beliebigen, zwischen den Grenzen 0 und ∞ liegenden Werth geben kann. Denn für jeden positiven Werth von A ist die Function A^x von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ beständig stetig, und die Gleichung

$$A^{x+y} = A^x . A^y$$

identisch. Die Größe A ist demnach eine willkürliche Constante, welche nur positive Werthe zuläßt.

Anmerkung. Man kann die Gleichung (9) auch auf folgendem, sehr einfachem, Wege finden.

Nimmt man die Logarithmen der beiden Theile der Gleichung (2) in einem beliebigen Systeme, so findet man

$$L\varphi(x+y) = L\varphi(x) + L(y);$$

woraus sich ergibt (s. die erste Aufgabe):

$$L\varphi(x) = x . L\varphi(1);$$

und wenn man von den Logarithmen auf die Zahlen zurückgeht,

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^x.$$

Aufgabe 3. Die Function $\varphi(x)$ soll dergestalt bestimmt werden, daß sie zwischen zweien beliebigen positiven Grenzen von x stetig ist, und daß für alle positiven Werthe der Veränderlichen x und y

$$(3) \qquad \varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ist.

Auflösung. Es würde sehr leicht sein, dieses dritte Problem auf ähnliche Weise aufzulösen, wie das erste; man

kommt aber weit schneller zum Ziele, wenn man die Gleichung (3) unter eine Form bringt, welche der der Gleichung (1) analog ist, und das wollen wir thun.

Bezeichnet man durch A eine beliebige Zahl, und durch L das Zeichen der Logarithmen, in demjenigen Systeme, dessen Basis A ist, so hat man für alle positiven Werthe der Veränderlichen x und y,

$$x = A^{Lx}, \quad y = A^{Ly},$$

so daß die Gleichung (3) sich in

$$\varphi\left(A^{Lx+Ly}\right) = \varphi\left(A^{Lx}\right) + \varphi\left(A^{Ly}\right)$$

verwandeln wird. Da in dieser letztern Formel die Veränderlichen Lx, Ly beliebige positive oder negative Werthe haben können, so wird, für alle möglichen reellen Werthe von x und y,

$$\varphi\left(A^{x+y}\right) = \varphi\left(A^{x}\right) + \varphi\left(A^{y}\right)$$

sein. Hieraus nun folgt [s. Aufg. 1., Gleich. (6)]:

$$\varphi\left(A^{x}\right) = x\,\varphi\left(A^{1}\right) = x\,\varphi(A),$$

mithin

$$\varphi\left(A^{Lx}\right) = \varphi(A) \,.\, Lx,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(11) \qquad \varphi(x) = \varphi(A) \,.\, Lx.$$

Aus der 11ten Formel folgt, daß jede Function $\varphi(x)$, welche die verlangten Eigenschaften haben soll, nothwendig von der Form

$$(12) \qquad \varphi(x) = a\,Lx,$$

sein muß, wo a constant ist. Es ist übrigens leicht einzusehen, daß: 1) die Constante a völlig willkürlich ist, und daß 2), wenn für die ebenfalls willkürliche Zahl A ein passender Werth gewählt wird, jene auf die Einheit reducirt werden kann.

Aufgabe 4. Eine Function $\varphi(x)$ soll dergestalt bestimmt werden, daß sie zwischen zweien beliebigen, positiven Grenzen von x stetig ist, und daß für alle positiven Werthe der Veränderlichen x und y

$$(4) \qquad \varphi(xy) = \varphi(x) \,.\, \varphi(y)$$

ist.

Auflösung. Diese vierte Aufgabe würde sehr leicht nach einer Methode aufgelöst werden können, welche derjenigen ähnlich ist, deren wir uns bei der zweiten bedient haben. Aber man kommt leichter zum Ziele, wenn man erwägt, daß, wenn L das Zeichen der Logarithmen in demjenigen Systeme bezeichnet, dessen Grundzahl A ist, die Gleichung (4) unter die Form

$$\varphi.(A^{Lx+Ly}) = \varphi(A^{Lx}).\varphi(A^{Ly})$$

gebracht werden kann. Da in dieser letztern Gleichung die Veränderlichen Lx und Ly beliebige positive oder negative Werthe haben können, so ist für alle möglichen reellen Werthe von x und y

$$\varphi(A^{x+y}) = \varphi(A^{x}).\varphi(A^{y}),$$

woraus sich ergibt [s. Aufg. 2., Gleich. (9)]

$$\varphi(A^{x}) = [\varphi(A)]^{x};$$

mithin auch

$$\varphi(A^{Lx}) = [\varphi(A)]^{Lx} = x^{L\varphi(A)},$$

oder, was dasselbe ist,

$$(13] \qquad \varphi(x) = x^{L\varphi(A)}.$$

Aus der Gleichung (13) folgt, daß jede Function $\varphi(x)$, welche die verlangten Eigenschaften haben soll, nothwendig von der Form

$$(14) \qquad \varphi(x) = x^{a}$$

sein muß, wo a constant ist. Uebrigens kann man sich leicht überzeugen, daß diese Constante völlig willkürlich ist.

Die vier Werthe von $\varphi(x)$, welche respective den Gleichungen (1), (2), (3), (4) Genüge leisten, nämlich

$$ax,\ A^{x},\ aLx,\ x^{a},$$

haben das mit einander gemein, daß eine jede von ihnen eine willkürliche Constante a oder A enthält. Hieraus ergibt sich: daß sich die Aufgaben, in welchen verlangt wird, daß die unbekannte Beschaffenheit gewisser Functionen aus gegebenen Eigenschaften derselben abgeleitet werde, gar sehr von denjenigen unterscheiden, bei welchen es darauf ankommt, die unbekannten

Werthe gewisser Größen zu berechnen. In dem letztern Falle werden die Werthe der Unbekannten zuletzt durch andere, bekannte und bestimmte Größen ausgedrückt, während in dem erstern, wie man hier sehen kann, die Ausdrücke willkürliche Constanten gestatten.

§. 2. Es wird eine stetige Function von der Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man zwei ähnliche Functionen veränderlicher Größen mit einander multiplicirt und das Product verdoppelt, das Resultat demjenigen gleich ist, welches man erhalten würde, wenn man die ähnlichen Functionen der Summe und der Differenz dieser Veränderlichen addirte.

In jeder der Aufgaben des vorhergehenden Paragraphen enthielt die zu entwickelnde Gleichung, neben der unbekannten $\varphi(x)$, zwei andere ähnliche Functionen, nämlich $\varphi(y)$ und $\varphi(x+y)$ oder $\varphi(xy)$. Wir wollen uns gegenwärtig ein neues Problem derselben Art vorlegen, in welchem jedoch die Bedingungsgleichung, der die Function $\varphi(x)$ Genüge leisten soll, vier ähnliche Gleichungen enthält. Dieses Problem ist folgendes:

Aufgabe. *Die Function $\varphi(x)$ soll dergestalt bestimmt werden, daß sie zwischen zwei beliebigen reellen Grenzen von x stetig ist, und daß für alle reellen Werthe der Veränderlichen x und y*

$$(1) \quad \varphi(y+x) - \varphi(y-x) = 2\varphi(x).\varphi(y)$$

ist.

Auflösung. Setzt man in der Gleichung (1) $x = 0$, so erhält man

$$\varphi(0) = 1.$$

$\varphi(x)$ reducirt sich also für den besonderen Werth $x = 0$ auf die Einheit; und da diese Function zwischen beliebigen Grenzen stetig sein soll, so ist es einleuchtend, daß sie in der Nähe dieses besonderen Werthes von der Einheit wenig verschieden und daher positiv sein wird. Wenn demnach α eine sehr kleine Zahl bedeutet, so wird man diese Zahl dergestalt wählen können, daß die Function $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen

$$x = 0, \quad x = \alpha$$

beständig positiv bleibt. Hier gibt es nun zwei Fälle. Der positive Werth von $\varphi(\alpha)$ wird nämlich zwischen den Grenzen 0 und 1 liegen, oder er wird die Einheit übersteigen. Wir wollen diese beiden Fälle nach einander untersuchen.

Zuvörderst wollen wir annehmen, daß $\varphi(\alpha)$ zwischen 0 und 1 liege; so wird diese Größe dem Cosinus irgend eines Bogens θ gleichgesetzt werden können, welcher zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ fällt; so daß also

$$\varphi(\alpha) = \cos.\ \theta$$

ist. Wenn man außerdem in der unter die Form

$$\varphi(y+x) = 2\varphi(x) \,.\, \varphi(y) - \varphi(y-x)$$

gebrachten Gleichung (1) successive

$$x = \alpha, \quad y = \alpha,$$
$$x = \alpha, \quad y = 2\alpha,$$
$$x = \alpha, \quad y = 3\alpha,$$
$$\text{etc.} \ldots\ldots$$

setzt, so wird man folgende Formeln erhalten:

$$\varphi(2\alpha) = 2\cos.\ \theta^2 - 1 = \cos.\ 2\theta,$$
$$\varphi(3\alpha) = 2\cos.\ \theta.\ \cos.\ 2\theta - \cos.\ \theta = \cos.\ 3\theta,$$
$$\varphi(4\alpha) = 2\cos.\ \theta.\ \cos.\ 3\theta - \cos.\ 2\theta = \cos.\ 4\theta,$$

und allgemein, wenn m eine beliebige ganze Zahl ist,

$$\varphi(m\alpha) = 2\cos.\ \theta.\ \cos.\ (m-1)\theta - \cos.\ (m-2)\theta = \cos.\ m\theta.$$

Uebrigens gilt die Formel

$$\varphi(m\alpha) = \cos.\ m\theta$$

auch dann noch, wenn für m ein Bruch substituirt wird, also überhaupt für $m = \mu$, wenn μ eine beliebige Zahl ist. Setzt man nämlich in der Gleichung (1), $x = \frac{1}{2}\alpha$, $y = \frac{1}{2}\alpha$, so erhält man

$$[\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)]^2 = \frac{\varphi(0)+\varphi(\alpha)}{2} = \frac{1+\cos.\ \theta}{2} = (\cos.\ \tfrac{1}{2}\theta)^2.$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, welche positiv genommen werden muß, weil $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \alpha$, und cos. x zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = \theta$ positiv ist, so findet man

$$\varphi\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right) = \cos.\ \tfrac{1}{2}\theta.$$

Eben so erhält man, wenn

$$x = \tfrac{1}{4}\alpha,\quad y = \tfrac{1}{4}\alpha \text{ ist,}$$

$$\left[\varphi\left(\tfrac{1}{4}\alpha\right)\right]^2 = \frac{\varphi(0)+\varphi\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)}{2} = \frac{1+\cos.\tfrac{1}{2}\theta}{2} = \left(\cos.\tfrac{1}{4}\theta\right)^2,$$

und hieraus

$$\varphi\left(\tfrac{1}{4}\alpha\right) = \cos.\tfrac{1}{4}\theta.$$

Durch ähnliche Betrachtungen erhält man successive die Formeln

$$\varphi\left(\tfrac{1}{8}\alpha\right) = \cos.\tfrac{1}{8}\theta,$$

$$\varphi\left(\tfrac{1}{16}\alpha\right) = \cos.\tfrac{1}{16}\theta,$$

etc.....

und allgemein, wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right) = \cos.\frac{1}{2^n}.\theta.$$

Verfährt man mit diesem Werthe von $\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)$, um den von $\varphi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right)$ daraus herzuleiten, eben so, wie wir mit dem Werthe von $\varphi(\alpha)$ verfuhren, um den von $\varphi(m\alpha)$ daraus abzuleiten, so erhält man

$$\varphi\left(\frac{m}{2}\alpha\right) = \cos.\frac{m}{2^n}\theta,$$

und wenn der Bruch $\frac{m}{n}$ beständig seinen Werth ändert und sich der Zahl μ unendlich nähert, für diese Grenze

$$(2) \qquad \varphi(\mu\alpha) = \cos.\ \mu\theta.$$

Setzt man ferner in der Formel (1)

$$x = \mu\alpha,\quad y = 0,$$

so ergibt sich

$$\varphi(-\mu\alpha) = [2\varphi(0) - 1]\,\varphi(\mu\alpha) = \cos.\mu\theta = \cos.(-\mu\theta).$$

Die Gleichung (2) gilt also auch dann, wenn $-\mu$ für μ gesetzt wird, oder mit anderen Worten: es ist für beliebige positive oder negative Werthe von x

$$(3) \qquad \varphi(\alpha x) = \cos.\ \theta x.$$

Verwandelt man in dieser Formel x in $\frac{x}{\alpha}$, so erhält man

$$(4) \qquad \varphi(x) = \cos.\frac{\theta}{\alpha}x = \cos.\left(-\frac{\theta}{\alpha}x\right).$$

Dieser Werth von $\varphi(x)$ entspricht dem Falle, wo die positive Größe $\varphi(\alpha)$ zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt. Angenommen, diese Größe übersteige die Einheit; so sieht man leicht, daß man in diesem zweiten Falle der Gleichung

$$\varphi(\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$$

durch einen positiven Werth von r Genüge leisten kann. Man darf nämlich nur

$$r = \varphi(\alpha) + \left\{[\varphi(\alpha)]^2 - 1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

setzen. Setzt man nun in der Gleichung (1) successive

$$x = \alpha, \quad y = \alpha,$$
$$x = \alpha, \quad y = 2\alpha,$$
$$x = \alpha, \quad y = 3\alpha,$$
$$\text{etc.}\ldots\ldots,$$

so erhält man folgende Formeln:

$$\varphi(2\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - 1 = \tfrac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right),$$

$$\varphi(3\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right),$$

$$\varphi(4\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right) - \tfrac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(r^4 + \frac{1}{r^4}\right),$$
$$\text{etc.}\ldots\ldots,$$

und allgemein, wenn m eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$\varphi(m\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^{m-1} + \frac{1}{r^{m-1}}\right) - \tfrac{1}{2}\left(r^{m-2} + \frac{1}{r^{m-2}}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(r^m + \frac{1}{r^m}\right).$$

Ich behaupte aber, daß die Formel

$$\varphi(m\alpha) = \frac{1}{2}\left(r^m + \frac{1}{r^m}\right)$$

auch dann gilt, wenn m ein Bruch oder gar eine beliebige Zahl ist. Dies läßt sich auf folgende Weise gar leicht darthun:

Setzt man in der Gleichung (1), $x = \frac{1}{2}\alpha$, $y = \frac{1}{2}\alpha$, so erhält man

$$[\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha)]^2 = \frac{\varphi(0)+\varphi(\alpha)}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})}{2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}}\right);$$

zieht man ferner auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Quadratwurzel aus, welche positiv sein muß, weil $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = \alpha$ positiv ist, so findet man

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Setzt man in der Gleichung (1)

$$x = \tfrac{1}{4}\alpha, \quad y = \tfrac{1}{4}\alpha,$$

so findet man

$$[\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha)]^2 = \frac{\varphi(0)+\varphi(\frac{1}{2}\alpha)}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}}\right)}{2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(r^{\frac{1}{4}} + r^{-\frac{1}{4}}\right)^2,$$

folglich auch

$$\varphi(\tfrac{1}{4}\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{4}} + r^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Durch ähnliche Betrachtungen erhält man successive die Formeln

$$\varphi(\tfrac{1}{8}\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{8}} + r^{-\frac{1}{8}}\right),$$

$$\varphi(\tfrac{1}{16}\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{16}} + r^{-\frac{1}{16}}\right),$$

etc. . . . .

und allgemein, wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2^n}} + r^{-\frac{1}{2^n}}\right).$$

Leitet man $\varphi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right)$ auf dieselbe Weise aus $\varphi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)$ her, wie wir $\varphi(m\alpha)$ aus $\varphi(\alpha)$ abgeleitet haben, so findet man

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{m}{n}} + r^{\frac{-m}{n}}\right).$$

Angenommen, der Bruch $\frac{m}{2^n}$ ändere beständig seinen Werth und nähere sich unendlich der Zahl μ, so erhält man, für diese Grenze, die Gleichung

$$(5) \qquad \varphi(\mu\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\mu} + r^{-\mu}\right).$$

Setzt man ferner in der Formel (1)

$$x = \mu\alpha, \quad y = 0,$$

so ergibt sich

$$\varphi(-\mu\alpha) = [2\varphi(0) - 1]\varphi(\mu\alpha) = \tfrac{1}{2}\left(r^{-\mu} + r^{\mu}\right).$$

Die Gleichung (5) gilt also auch dann, wenn man μ in $-\mu$ verwandelt, d. h. es ist für beliebige positive oder negative Werthe der Veränderlichen x,

$$(6) \qquad \varphi(\alpha x) = \tfrac{1}{2}\left(r^{x} + r^{-x}\right).$$

Verwandelt man in dieser Formel x in $\frac{x}{\alpha}$, so findet man

$$(7) \qquad \varphi(x) = \tfrac{1}{2}\left(r^{\frac{x}{\alpha}} + r^{-\frac{x}{\alpha}}\right).$$

Setzt man in der Gleichung (4), $\pm\theta = a$ und in (7) $r^{\pm\frac{1}{\alpha}} = A$, so nehmen diese Gleichungen respective folgende Form an

$$(8) \qquad \varphi(x) = \cos. ax.$$

$$(9) \qquad \varphi(x) = \tfrac{1}{2}\left(A^{x} + A^{-x}\right).$$

Wenn demnach a eine constante Größe bedeutet, A dagegen eine constante Zahl, so wird jede Function $\varphi(x)$, welche zwischen beliebigen Grenzen von x stetig ist und der Gleichung (1) Genüge leistet, nothwendig eine der beiden so eben gefundenen Formen haben. Man kann sich übrigens leicht überzeugen, daß die Werthe von $\varphi(x)$, welche sich aus den Glei-

chungen (8) und (9) ergeben, unabhängig von jedem besondern Werthe von a und A die verlangten Eigenschaften haben. A und a sind also völlig willkürliche Constanten, von welchen die eine nur positive Werthe haben kann.

Die Functionen

$$\cos. ax, \quad \tfrac{1}{2}\left(A^{x} + A^{-x}\right)$$

haben, wie man sieht, das mit einander gemein, daß sie beide der Gleichung (1) Genüge leisten (eine merkwürdige Analogie). Auch reduciren sich beide Functionen für $x = 0$ auf Eins. Aber ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden ist der, daß der Zahlenwerth der ersteren beständig kleiner als die Einheit ist, wenn er nicht mit dieser Grenze zusammenfällt, während in demselben Falle die zweite beständig größer ist.

Sechstes Capitel.

Von den convergirenden und divergirenden Reihen. Regeln in Beziehung auf die Convergenz der Reihen. Summation einiger convergirenden Reihen.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die Reihen.

Eine unbestimmte Reihenfolge von Größen

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \text{ etc.} \ldots$$

welche nach einem bestimmten Gesetze aus einander abgeleitet werden können, heißt eine Reihe. Jene Größen selbst werden die Glieder der Reihe genannt.

Es sei

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3, + \text{etc.} \ldots + u_{n-1}$$

die Summe der n ersten Glieder, wo also n eine ganze Zahl bedeutet. Wenn nun, für immer zunehmende Werthe von n, die Summe s_n sich einer gewissen Grenze s unendlich nähert, so ist die Reihe convergirend, und die besagte Grenze heißt alsdann die Summe der Reihe. Wenn dagegen, bei immer zunehmenden Werthen von n, die Summe s_n sich keiner bestimmten Grenze nähert, so heißt die Reihe eine divergirende, und für eine solche gibt es keine Summe. In beiden Fällen heißt dasjenige Glied, welches dem Index n entspricht, also u_n, das allgemeine Glied. Die Reihe ist vollkommen bestimmt, wenn dieses allgemeine Glied als Function des Index n gegeben ist.

Eine der allereinfachsten Reihen ist die geometrische Progression

$$1, x, x^2, x^3 \ldots \text{etc.} \ldots$$

deren allgemeines Glied x^n ist. Die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe ist bekanntlich

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x},$$

und da der Zahlenwerth des Bruches $\frac{x^n}{1-x}$, bei zunehmenden Werthen von n sich der Grenze Null nähert, oder aber über alle Grenzen hinaus zunimmt, je nachdem x kleiner oder größer als Eins ist, so ist in dem ersten Falle die Reihe convergirend, und ihre Summe $= \frac{1}{1-x}$; im zweiten Falle dagegen ist sie divergirend und hat also keine Summe.

Soll demnach die Reihe

(1) $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, u_{n+1}, \text{etc.} \ldots$

convergiren, so ist es nothwendig, aber auch hinreichend, daß, bei immer zunehmenden Werthen von n, die Summe

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$$

sich einer bestimmten Grenze s nähere, d. h. es ist nothwendig und hinreichend, daß für unendlich große Werthe von n die Summen

$$s_n, \quad s_{n+1}, \quad s_{n+2}, \quad \text{etc.}, \ldots$$

von der Grenze s und also auch unter sich unendlich wenig verschieden sind. Uebrigens sind die Differenzen zwischen der Summe s_n und jeder der folgenden durch die Gleichungen

$$s_{n+1} - s_n = u_n,$$
$$s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1},$$
$$s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\text{etc.} \ldots\ldots$$

gegeben. Wenn demnach die Reihe (1) convergiren soll, so muß zuvörderst das allgemeine Glied u_n desto kleiner werden, je größer n wird; aber es ist nicht hinreichend, daß diese Bedingung erfüllt werde, sondern es müssen auch die verschiedenen Summen

$$u_n + u_{n+1},$$
$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
etc. ...

d. h., die Summen der Größen

$$u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \text{etc.} \ldots.$$

von der ersten an gerechnet, wie groß ihre Anzahl immer sein mag, beständig kleiner als jede anzugebende Größe sein. Umgekehrt, wenn diese verschiedenen Bedingungen erfüllt werden, ist die Convergenz der Reihe außer Zweifel.

Betrachten wir z. B. die geometrische Progression

(2) $1, x, x^2, x^3, \text{etc.} \ldots.,$

so sehen wir, daß, wenn x größer als die Einheit ist, das allgemeine Glied x^n zugleich mit n bis ins Unendliche zunimmt, und dieser eine Umstand ist hinreichend, um die Divergenz der Reihe darzuthun; auch wird die Reihe divergent bleiben, wenn man $x = \pm 1$ setzt, weil der Zahlenwerth von x^n sich auf die Einheit reducirt, sein Werth also keinesweges abnimmt, wenn die Werthe von n zunehmen. Da aber die Summe der Glieder der Reihe, von x^n an gerechnet, und zwar

$$x^n,$$
$$x^n + x^{n+1} = x^n \cdot \frac{1-x^2}{1-x},$$
$$x^n + x^{n+1} + x^{n+2} = x^n \cdot \frac{1-x^3}{1-x},$$
etc. .....

zwischen den Grenzen

$$x^n, \quad \frac{x^n}{1-x}$$

liegt, wenn der Zahlenwerth von x kleiner als die Einheit ist, so wird jede derselben unendlich klein, wenn n unendlich groß ist; folglich ist alsdann, wie wir bereits wissen, die Reihe convergent.

Wir wollen als zweites Beispiel die Reihe

(3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \text{etc.} \ldots.$

wählen. Das allgemeine Glied dieser Reihe, nämlich $\frac{1}{n}$, wird

um so kleiner, je größer n wird, und nichts desto weniger ist sie nicht convergent; denn die Summe von $\frac{1}{n+1}$ + den darauf folgenden Gliedern, bis zum Gliede $\frac{1}{2n}$ inclusive, also

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$

ist, unabhängig von jedem Werthe von n, beständig größer als das Product

$$n.\frac{1}{2n}=\frac{1}{2};$$

mithin nimmt diese Summe keinesweges ab, wenn die Werthe von n zunehmen, was doch der Fall sein muß, wenn die Reihe convergiren soll. — Bezeichnet man durch s_n die Summe der n ersten Glieder der Reihe (3), und durch 2^m die höchste Potenz von 2, welche in n enthalten ist, so findet man

$$s_n=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})$$

$$+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+\ldots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right),$$

und a fortiori

$$s_n>1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{2}=1+\frac{m}{2}.$$

Mithin wächst die Summe s_n, wenn die ganze Zahl m (also auch n) wächst, woraus abermals hervorgeht, daß unsere Reihe divergirt.

Wir wollen noch die Reihe

$$(4)\quad 1,\ \frac{1}{1'},\ \frac{1}{1.2'},\ \frac{1}{1.2.3'},\ \ldots\ \frac{1}{1.2.3\ldots n'},\ \text{etc.}\ldots$$

betrachten.

Die Glieder der Reihe, welche auf das n^{te} folgen, also

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n'},\ \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)'},\ \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)}\ \text{etc.}\ldots$$

werden respective kleiner sein, als die ihnen correspondirenden Glieder der geometrischen Progression

$\frac{1}{1.2.3...n}$, $\frac{1}{1.2.3...n} \cdot \frac{1}{n}$, $\frac{1}{1.2.3....n} \cdot \frac{1}{n^2}$, etc....

mithin wird die Summe irgend wievieler Glieder, vom ersten abgerechnet, beständig kleiner sein, als die Summe der correspondirenden Glieder dieser convergirenden geometrischen Reihe, also um so mehr kleiner, als die Summe dieser Reihe, d. h. kleiner als

$$\frac{1}{1.2.3...n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1.2.3...(n-1)} \cdot \frac{1}{n-1}.$$

Da diese letztere Summe desto kleiner wird, je größer n wird, so folgt, daß die Reihe (4) ebenfalls convergirt. Man ist übereingekommen, die Summe dieser Reihe durch den Buchstaben e zu bezeichnen. Addirt man die n ersten Glieder der Reihe, so erhält man als Näherungswerth von e

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + ... + \frac{1}{1.2.3...(n-1)};$$

aus dem bisher Gesagten aber folgt, daß der Fehler, welchen man hierbei begeht, kleiner ist, als das Product des n^{ten} Gliedes durch $\frac{1}{n-1}$. Setzt man z. B. $n = 11$, so findet man als Näherungswerth von e,

(6) $$e = 2{,}7182818....;$$

und der begangene Fehler wird kleiner sein, als

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} \cdot \frac{1}{10},$$

d. h. kleiner als $\frac{1}{36288000}$, so daß er also auf die 7te Decimalstelle keinen Einfluß mehr hat.

Die also bestimmte Zahl e wird bei der Summirung der Reihen und im Infinitesimalcalcul oft gebraucht. Die Logarithmen in demjenigen Systeme, dessen Grundzahl diese Zahl ist, heißen nach Nepper, dem Erfinder der Logarithmen, die Nepper'schen; man nennt sie jedoch auch die hyperbolischen, weil durch dieselben die verschiedenen Theile des zwischen der gleichseitigen Hyperbel und ihren Asymptoten liegenden Flächenraumes gemessen werden. Man deutet gewöhnlich die Summe

einer convergirenden Reihe durch die Summe ihrer ersten Glieder an, auf welche man ein etc. folgen läßt. So wird z. B., wenn die Reihe

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots.$$

convergirt, die Summe derselben durch

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.}\ldots$$

angedeutet. Dieser Annahme gemäß wird der Werth von e durch die Gleichung

$$(6)\quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2.} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}\ldots.$$

bestimmt, und wenn man die geometrische Progression

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \text{etc.}\ldots$$

betrachtet, so hat man für Werthe von x, welche kleiner als Eins sind,

$$(7)\quad 1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.}\ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Die Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \text{etc.}\ldots$$

sei convergirend. Bezeichnet man nun ihre Summe durch s, und durch s_n die Summe ihrer n ersten Glieder, so findet man

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \text{etc.}\ldots$$
$$= s_n + u_n + u_{n+1} + \text{etc.}\ldots;$$

mithin ist

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + \text{etc.}\ldots,$$

folglich auch die Reihe der Größen

$$u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2},\ \text{etc.}\ldots$$

eine convergirende, deren Summe gleich $s - s_n$ ist. Bezeichnet man diese Summe durch r_n, so hat man

$$s = s_n + r_n,$$

und r_n heißt alsdann der Rest der Reihe, vom n^{ten} Gliede ab gerechnet.

Wenn die Glieder der Reihe (1) eine und dieselbe Veränderliche x enthalten; wenn überdies die Reihe convergirt, und wenn alle Glieder derselben, in der Nähe eines besonderen Wer-

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

thes von x, continuirliche Functionen dieser Veränderlichen sind, so sind auch

$$s_n, \quad r_n, \text{ und } s$$

Functionen von x, und die erstere offenbar, in der Nähe des besagten besonderen Werthes von x, eine stetige Function dieser Veränderlichen. Wir wollen nun untersuchen, welchen Zuwachs diese drei Functionen erhalten, wenn x um ein unendlich-Kleines α wächst. Der Zuwachs von s_n wird, für alle möglichen Werthe von n, unendlich klein sein; der von r_n wird zugleich mit r_n unmerklich werden, wenn man dem n einen sehr bedeutenden Werth gibt. Mithin wird auch der Zuwachs der Function s nur unendlich klein sein können. Aus dieser Betrachtung ergibt sich unmittelbar folgender Satz:

Lehrsatz 1. Wenn die Glieder der Reihe (1) Functionen einer und derselben Veränderlichen x sind, und zwar stetige Functionen in Beziehung auf diese Veränderliche in der Nähe eines besonderen Werthes, für welchen die Reihe convergirt, so ist in der Nähe dieses besonderen Werthes auch die Summe der Reihe, s, eine continuirliche Function von x.

Nach diesem Lehrsatze muß die Summe der Reihe (2) zwischen den Grenzen $x = -1$, $x = +1$ eine continuirliche Function von x sein, was sich übrigens auch aus der bloßen Betrachtung des durch die Gleichung $s = \frac{1}{1-x}$ gegebenen Werthes von s ergibt.

§. 2. Von den Reihen, deren Glieder alle positiv sind.

Wenn alle Glieder der Reihe

(1) $$u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots u_n, \text{ etc.}\ldots$$

positiv sind, so kann man gemeinhin mit Hülfe des folgenden Lehrsatzes entscheiden, ob sie convergirt oder divergirt.

Lehrsatz 1. Man suche die Grenze oder die Grenzen, denen sich der Ausdruck $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ nähert,

wenn n beständig wächst, und bezeichne durch k die größte dieser Grenzen, oder, mit andern Worten, die Grenze der größten Werthe des besagten Ausdrucks. Erhält man $k < 1$, so ist die Reihe (1) convergirend; ist $k > 1$, so ist sie divergirend.

Beweis. Gesetzt, es sei $k < 1$, so wollen wir eine dritte Zahl U uns denken, welche zwischen 1 und k liegt, sonst aber beliebig ist, so daß

$$k < U < 1$$

ist. Wenn n größer ist, als jede anzugebende Zahl, so werden die größten Werthe von $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ sich der Grenze k nicht unendlich nähern können, wenn sie nicht zuletzt beständig kleiner als U sind. Folglich wird man der Zahl n einen Werth beilegen können, welcher so groß ist, daß, wenn n diesen oder einen noch größeren Werth hat, man beständig erhält

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} < U, \quad u_n < U^n.$$

Hieraus folgt: daß die Glieder der Reihe

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, u_{n+1}, \text{etc.} \ldots$$

zuletzt beständig kleiner sein werden, als die ihnen correspondirenden Glieder der geometrischen Progression

$$1, U, U^2, U^3, \ldots U^n, U^{n+1} \text{ etc.} \ldots,$$

und da diese Progression convergirt (da $U < 1$ ist), so muß dieses bei der Reihe (1) um so mehr der Fall sein.

2) Gesetzt aber, es sei $k > 1$, so wollen wir uns noch eine zwischen 1 und k liegende dritte Zahl U denken, so daß man also erhält

$$k > U > 1.$$

Wird n größer als jede anzugebende Größe, so werden die größten Werthe von $(u_n)^{\frac{1}{n}}$, indem sie sich beständig dem k nähern, zuletzt größer als U werden, so daß also für so große Werthe von n

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} > U \text{ oder } u_n > U^n$$

wird. Die Glieder der Reihe

$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, u_{n+1}, u_{n+2}$, etc.....

werden also zuletzt größer sein, als die correspondirenden Glieder der geometrischen Progression

$$1, U, U^2, U^3, \ldots U^n, U^{n+1}, U^{n+2}, \text{etc.}\ldots$$

Da diese Reihe divergirt (denn es ist $U > 1$), die Glieder derselben also bis ins Unendliche wachsen, so muß dieses bei der Reihe (1) um so mehr der Fall sein.

In sehr vielen Fällen kann man den Werth von k vermittelst des 4ten Lehrsatzes (Cap. 2. §. 3.) bestimmen. Nach diesem Lehrsatze ist jederzeit, wenn der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sich einer bestimmten Grenze nähert, diese Grenze der Werth von k. Man kann demnach folgenden Satz aufstellen:

Lehrsatz 2. Wenn für zunehmende Werthe von n sich der Quotient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

einer bestimmten Grenze k nähert, so ist die Reihe (1) convergirend, so oft $k < 1$ ist, divergirend dagegen, so oft $k > 1$ ist.

Betrachtet man z. B. die Reihe

$$1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \ldots \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \text{etc.}\ldots$$

so findet man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n(n+1)} = \frac{1}{n+1}, \quad k = \frac{1}{\infty} = 0;$$

mithin ist (wie wir auch bereits früher gesehen haben) die Reihe convergirend.

Der erste der beiden so eben aufgestellten Lehrsätze läßt keinen Zweifel über die Convergenz oder Divergenz einer Reihe übrig, deren Glieder alle positiv sind; außer in dem Falle, wenn die durch k bezeichnete Größe der Einheit gleich ist. In diesem besonderen Falle ist es nicht immer leicht, die Frage, ob Convergenz oder Divergenz stattfinde, genügend zu beantworten. Indessen wollen wir doch hier einige Sätze beweisen, vermittelst welcher man öfters diesen Zweck erreichen kann.

Lehrsatz 3. Wenn in der Reihe (1) ein jedes Glied kleiner als das vorhergehende ist, so ist sie convergirend, wenn die Reihe

(2) $u_0, 2u_1, 4u_3, 8u_7, 16u_{15}$, etc....

convergirt; divergirend dagegen, wenn diese Reihe divergirt.

Beweis. Gesetzt, die Reihe (1) convergire, und ihre Summe sei s, so hat man

$$u_0 = u_0,$$
$$2u_1, = 2u_1,$$
$$4u_3 < 2u_2 + 2u_3,$$
$$8u_7 < 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7,$$
etc.....

mithin die Summe der Glieder der Reihe (2), wie groß deren Anzahl immer sein mag, kleiner als

$$u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \text{etc.}... = 2s - u_0;$$

folglich ist die Reihe (2) convergirend.

Gesetzt aber, die Reihe (1) divergire, so wird die Summe einer sehr großen Anzahl von Gliedern jede anzugebende Zahl übersteigen, und da

$$u_0 = u_0,$$
$$2u_1 > u_1 + u_2,$$
$$4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6,$$
$$8u_7 > u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14},$$
etc.....

so wird die Summe der Größen

$$u_0, 2u_1, 4u_3, 8u_7, \text{etc.}...,$$

wenn man eine bedeutende Anzahl von Gliedern nimmt, größer als jede anzugebende Größe werden. Die Reihe (2) wird also divergiren.

Zusatz. Wenn wan für die Reihe (1) folgende annimmt,

(3) $$1, \frac{1}{2^\mu}, \frac{1}{3^\mu}, \frac{1}{4^\mu}, \text{etc.}...,$$

wo μ eine beliebige Größe bedeutet, so ist die Reihe (2) folgende

$$1, 2^{1-\mu}, 4^{1-\mu}, 8^{1-\mu}, \text{etc.}....$$

Diese Reihe ist eine geometrische Progression und convergirend, wenn $\mu > 1$ ist, divergirend, wenn dieses nicht der Fall ist. Mithin wird die Reihe (3) gleichfalls convergiren, wenn $\mu > 1$ ist, und divergiren, wenn $\mu = 1$ oder $\mu < 1$ ist. Es wird also die erste von folgenden drei Reihen

$$(4) \qquad 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \text{etc.} \ldots,$$

$$(5) \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \text{etc.} \ldots,$$

$$(6) \qquad 1, \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}, \text{etc.} \ldots,$$

convergiren; die beiden letzten Reihen dagegen sind divergirend.

Lehrsatz 4. Bedeutet L das Zeichen der Logarithmen eines beliebigen Systems, und nimmt man an, daß für wachsende Werthe von n der Quotient

$$\frac{L\,(u_n)}{L\left(\frac{1}{n}\right)}$$

sich einer Grenze h nähert, so wird die Reihe (1) convergiren, wenn $h > 1$ ist; divergiren, wenn $h < 1$ ist.

Beweis. Gesetzt, es sei $h > 1$, so wollen wir eine zwischen 1 und h liegende dritte Zahl a uns denken, welche übrigens beliebig ist, so daß

$$h > a > 1$$

sein wird. Für sehr große Werthe von n wird alsdann der Quotient

$$\frac{L\,(u_n)}{L\left(\frac{1}{n}\right)}, \text{ oder der ihm gleiche}$$

$$\frac{L\left(\frac{1}{u_n}\right)}{L\,(n)}$$

zuletzt beständig größer als a sein, d. h. wenn n eine gewisse Grenze übersteigt, so wird beständig

$$\frac{L\left(\frac{1}{u_n}\right)}{L\,(n)} > a, \text{ oder, was dasselbe ist,}$$

$$L\left(\frac{1}{u_n}\right) > a\,L\,(n)$$

sein, mithin auch

$$\frac{1}{u_n} > n^a \text{ und } u_n < \frac{1}{n^a}.$$

Hieraus folgt: daß die Glieder der Reihe (1) zuletzt beständig kleiner sein werden, als die correspondirenden Glieder der Reihe

$$1,\ \frac{1}{2^a},\ \frac{1}{3^a},\ \frac{1}{4^a},\ \ldots\ \frac{1}{n^a},\ \frac{1}{(n+1)^a}\ \text{etc.}\ldots$$

und da diese convergirt (indem $a > 1$ ist), so wird die Reihe (1) um so mehr convergiren müssen.

Gesetzt aber, es sei $h < 1$, so wollen wir uns eine zwischen h und 1 liegende dritte Zahl a hinzudenken, so daß $h < a < 1$ ist. Für sehr große Werthe von n wird zuletzt offenbar

$$\frac{L\left(\frac{1}{u_n}\right)}{L\,(n)} < a, \text{ also auch } L\left(\frac{1}{u_n}\right) < a\,L\,(n),$$

mithin $\frac{1}{u_n} < n^a$ oder $u_n > \frac{1}{n^a}$.

Hieraus folgt: daß die Glieder der Reihe (1) zuletzt beständig größer werden müssen, als die correspondirenden Glieder der Reihe

$$1,\ \frac{1}{2^a},\ \frac{1}{3^a},\ \frac{1}{4^a},\ \ldots\ \frac{1}{n^a},\ \frac{1}{(n+1)^a},\ \text{etc.}\ldots,$$

und da diese divergirt (indem $a < 1$ ist), so wird die Reihe (1) um so mehr divergiren müssen.

Wenn zwei convergirende Reihen mit durchweg positiven Gliedern gegeben sind, so erhält man durch die Addition oder Multiplication beider Reihen eine neue Reihe, deren Summe

man erhält, wenn man die Summen der vorgelegten Reihen addirt oder multiplicirt. Dieses ergibt sich aus folgenden zwei Lehrsätzen.

Lehrsatz 5. Es seien

$$(7)\begin{cases} u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \text{ etc.}\ldots, \\ v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots v_n, \text{ etc.}\ldots, \end{cases}$$

zwei convergirende Reihen, welche nur positive Glieder enthalten, und deren Summen respective s und s′ sein mögen, so wird

$$(8)\quad u_0+v_0,\ u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ldots u_n+v_n,\ \text{etc.}\ldots$$

ebenfalls eine convergirende Reihe sein, deren Summe $s+s'$ ist.

Beweis. Setzt man

$$s_n = u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1},$$
$$s'_n = v_0+v_1+v_2+v_3+\ldots+v_{n-1},$$

so werden s_n und s'_n sich den Grenzen s und s′ nähern, wenn n beständig wächst; folglich wird sich die Summe $s_n+s'_n$, d. h. die Summe der n ersten Glieder der Reihe (8) in diesem Falle der Grenze $s+s'$ nähern, was zu erweisen war.

Lehrsatz 6. Unter übrigens gleichen Voraussetzungen ist

$$(9)\begin{cases} u_0v_0,\ u_0v_1+u_1v_0,\ u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0,\ldots. \\ \ldots u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_{n-1}v_1+u_nv_0,\ \text{etc.}\ldots. \end{cases}$$

ebenfalls eine convergirende Reihe, deren Summe ss' ist.

Beweis. Es seien s und s′ die Summen der n ersten Glieder der beiden Reihen (7) und s''_n die Summe der n ersten Glieder der Reihe (9). Bezeichnet man durch m die größte ganze Zahl, welche in $\frac{n-1}{2}$ enthalten ist, d. h. $\frac{n-1}{2}$ selbst, wenn n ungerade ist, und $\frac{n-2}{2}$, wenn n gerade ist; so wird man offenbar haben

$u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+\ldots+(u_0v_{n-1}+u_1v_{n-2}+\ldots+u_{n-2}v_1+u_{n-1}v_0)$
$< (u_0+u_1+\ldots+u_{n-1})\,(v_0+v_1+\ldots+v_{n-1})$
und $> (u_0+u_1+\ldots+u_m)\,(v_0+v_1+\ldots+v_m)$;
oder mit andern Worten

$$s''_n < s_n s'_n$$
$$\text{und} > s_{m+1}\, s'_{m+1}.$$

Wird nun n größer als jede anzugebende Zahl, so wird auch die Zahl

$$m = \frac{n - \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2}$$

unendlich groß werden, und die beiden Summen s_n und s_{m+1} werden sich der Grenze s nähern, während s'_n und s'_{m+1} sich der Grenze s′ nähern. Mithin werden sich die beiden Producte $s_n s'_n$, $s_{m+1} s'_{m+1}$ und zugleich auch die zwischen diesen Producten liegende Summe der Grenze ss′ nähern, was zu erweisen war.

§. 3. Von den Reihen, welche sowohl positive als negative Glieder enthalten.

Gesetzt, die Reihe

(1) $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$, etc....

bestehe aus theils positiven, theils negativen Gliedern, und es seien

(2) $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$, etc....

die respectiven Zahlenwerthe dieser Glieder, so daß man haben wird

$u_0 = \pm\varrho_0$, $u_1 = \pm\varrho_1$, $u_2 = \pm\varrho_2$, ... $u_n = \pm\varrho_n$, etc....,

so wird, da der Zahlenwerth der Summe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$$

niemals größer werden kann, als

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_{n-1},$$

die Reihe (1) convergent sein müssen, wenn dies bei (2) der Fall ist. Sie wird dagegen divergiren, wenn einige Glieder der Reihe (2) zuletzt größer werden, als jede anzugebende Größe.

Das Letztere findet statt, wenn die größten Werthe von $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$, für beständig zunehmende Werthe von n, sich einer Grenze nähern, welche größer als die Einheit ist. Wenn dagegen diese Grenze kleiner als die Einheit ist, so ist die Reihe (2) stets convergirend. Man kann demnach folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 1. Es sei ϱ_n der Zahlenwerth des allgemeinen Gliedes u_n der Reihe (1); k sei die Grenze, welcher die größten Werthe des Ausdrucks $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ sich nähern, wenn n beständig wächst; so wird die Reihe (1) convergiren, wenn $k < 1$, divergiren, wenn $k > 1$ ist.

Wenn der Bruch $\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$, d. h. der Zahlenwerth des Bruches $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sich einer bestimmten Grenze nähert, so wird diese Grenze, nach Cap. 2. §. 3. Lehrsatz 4., der gesuchte Werth von k sein. Diese Bemerkung führt auf folgenden Satz.

Lehrsatz 2. Wenn für zunehmende Werthe von n der Zahlenwerth des Bruches

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

sich einer bestimmten Grenze k nähert, so ist die Reihe (1) convergirend, so oft $k < 1$, und divergirend, so oft $k > 1$ ist.

Betrachtet man z. B. die Reihe

$$1, -\frac{1}{1}, +\frac{1}{1.2}, -\frac{1}{1.2.3}, + \text{etc.} \ldots,$$

so findet man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{1}{n+1}, \quad k = \frac{1}{\infty} = 0;$$

woraus denn folgt, daß die Reihe convergirt.

Der erste der beiden so eben aufgestellten Lehrsätze läßt keinen Zweifel über die Convergenz oder Divergenz einer Reihe übrig, außer wenn $k = 1$ wird. In diesem besonderen Falle kann

man zuweilen die Convergenz oder Divergenz der vorgelegten Reihe darthun, indem man entweder sich davon überzeugt, ob die Zahlenwerthe der verschiedenen Glieder eine convergirende Reihe bilden, oder indem man folgenden Lehrsatz im Auge hat.

Lehrsatz 3. Wenn der Zahlenwerth des allgemeinen Gliedes u_n der Reihe (1) für beständig zunehmende Werthe von n beständig und bis ins Unendliche abnimmt; wenn außerdem die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, so ist die Reihe convergirend.

Betrachten wir z. B. die Reihe

$$(3)\quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, + \text{etc.} \ldots \mp\frac{1}{n}, \mp\frac{1}{n+1}, \text{etc.} \ldots$$

so ist die Summe der Glieder, welche auf das n^{te} folgen, bis zum $(n+m)^{ten}$ Gliede der Reihe inclusive,

$$\pm\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \text{etc.} \ldots \pm\frac{1}{n+m}\right).$$

Da aber der Zahlenwerth dieser Summe, d. h.

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \text{etc.} \ldots \pm\frac{1}{n+m}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) - \text{etc.} \ldots$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\right) + \text{etc.} \ldots$$

welcher offenbar zwischen den Grenzen

$$\frac{1}{n+1} \text{ und } \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

liegt, für beständig zunehmende Werthe von n beständig abnehmen wird, und zwar ganz unabhängig von m, so ist die vorgelegte Reihe convergirend. Dieselben Betrachtungen kann man offenbar bei allen Reihen dieser Art machen. Ich erwähne unter andern folgende Reihe, welche nach dem dritten Lehrsatze für alle positiven Werthe von μ convergirt,

$$(4)\quad 1, -\frac{1}{2^\mu}, +\frac{1}{3^\mu}, -\frac{1}{4^\mu}, \text{etc.} \ldots$$

Wenn man in der Reihe (4) alle Glieder positiv macht, indem man das Zeichen —, überall, wo es vorkommt, weglässt, so erhält man die Reihe (3) des §. 2., welche divergirt, so oft $\mu = 1$ oder $\mu < 1$ ist. Um also eine convergirende Reihe in eine divergirende zu verwandeln, und umgekehrt, ist oft nichts weiter nöthig, als daß man die Zeichen gewisser Glieder verändere. Uebrigens findet dieses nur dann seine Anwendung, wenn die durch k bezeichnete Größe im zweiten Lehrsatze sich auf die Einheit reducirt.

Wenn eine convergirende Reihe mit durchgehends positiven Gliedern gegeben ist, so wird die Convergenz derselben durch Verminderung der Zahlenwerthe dieser Glieder und durch Veränderung des Zeichens bei einigen derselben nur noch vermehrt. Es verdient bemerkt zu werden, daß man beides bewirkt, wenn man jedes Glied durch einen Sinus oder Cosinus multiplicirt, und diese Bemerkung führt uns auf folgenden Satz:

Lehrsatz 4. Wenn die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe

(2) $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_n,$ etc. ...

convergirt, so ist dieses auch bei den beiden folgenden

$$(5)\begin{cases} \varrho_0 \cos.\theta_0, \varrho_1 \cos.\theta, \varrho_2 \cos.\theta_2, \ldots \varrho_n \cos.\theta_n, \\ \varrho_0 \sin.\theta_0, \varrho_1 \sin.\theta_1, \varrho_2 \sin.\theta_2, \ldots \varrho_n \sin.\theta_n, \end{cases}$$

der Fall, und zwar völlig unabhängig von allen besonderen Werthen der Bogen $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n,$ etc. ....

Zusatz. Setzt man allgemein

$$\theta_n = n\theta,$$

wo θ einen beliebigen Bogen bezeichnet, so verwandeln sich die Reihen (5) respective in

$$(6)\begin{cases} \varrho_0, \varrho_1 \cos.\theta, \varrho_2 \cos.2\theta, \varrho_3 \cos.3\theta, \ldots \varrho_n \cos.n\theta, \text{ etc.} \ldots \\ \varrho_1 \sin.\theta, \varrho_2 \sin.2\theta, \varrho_3 \sin.3\theta, \ldots \varrho_n \sin.n\theta, \text{ etc.} \ldots \end{cases}$$

und diese beiden sind convergirend, wenn es die Reihe (2) ist.

Betrachtet man zu gleicher Zeit zwei Reihen, von welchen

jede positive und negative Glieder enthält, so läßt sich leicht darthun, daß die Lehrsätze 5 und 6 des 2ten §. sich auch auf sie ausdehnen lassen, wie sogleich gezeigt werden soll.

Lehrsatz 5. Es seien

$$(7)\quad \begin{cases} u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \text{etc.}\ldots, \\ v_0, v_1, v_2, \ldots v_n, \text{etc.}\ldots, \end{cases}$$

zwei convergirende Reihen, und ihre Summen respective s und s', so ist

$$(8)\quad u_0+v_0, u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots u_n+v_n, \text{etc.}\ldots$$

ebenfalls eine convergirende Reihe und ihre Summe $s+s'$.

Beweis. Setzt man

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$
$$s'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1},$$

so werden s_n und s'_n, wenn n beständig wächst, sich respective den Grenzen s und s' nähern. Mithin nähert sich alsdann die Summe $s_n + s'_n$, d. h. die Summe der n ersten Glieder der Reihe (8), der Grenze $s+s'$, was zu erweisen war.

Lehrsatz 6. Unter übrigens gleichen Voraussetzungen wird, wenn jede der Reihen (7) convergirend bleibt, sobald man ihre Glieder auf deren Zahlenwerthe reducirt, die Reihe

$$(9)\quad \begin{cases} u_0v_0, u_0v_1 + u_1v_0, u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0, \ldots \\ \ldots u_0v_n + u_1v_{n-1} + \ldots + u_{n-1}v_1 + u_nv_0, \text{etc.}\ldots \end{cases}$$

ebenfalls convergiren, und ihre Summe wird ss' sein.

Beweis. Es seien auch hier s_n, s'_n die Summen der n ersten Glieder der beiden Reihen (7), und s''_n die Summe der n ersten Glieder der Reihe 9, so findet man

$$s_n s'_n - s''_n = u_{n-1}v_{n-1} + (u_{n-1}v_{n-2} + u_{n-2}v_{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \ldots + u_2v_{n-2} + u_1v_{n-1}).$$

Da aber der sechste Lehrsatz im §. 2. für den Fall bewiesen worden ist, wo die Reihen (7) nur positive Glieder enthalten,

so folgt unter dieser Voraussetzung, daß jede der Größen s_n, s'_n, s''_n sich der Grenze ss' nähert, wenn n beständig wächst; mithin wird sich die Differenz $s_n s'_n - s''_n$, oder, was dasselbe ist, die Summe

$$u_{n-1}\, v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \ldots,$$
$$\ldots + (u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \ldots + u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1})$$

der Grenze Null nähern.

Angenommen aber, daß die Glieder der Reihen (7) theils positiv, theils negativ sind, so wollen wir durch

$$(10) \begin{cases} \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n, \text{ etc.} \ldots \\ \varrho'_0, \varrho'_1, \varrho'_2, \ldots \varrho'_n, \text{ etc.} \ldots \end{cases}$$

die respectiven Zahlenwerthe der Glieder bezeichnen; angenommen ferner, daß, wie es der Lehrsatz voraussetzt, die Reihen (10) beide convergiren, so wird die Summe

$$\varrho_{n-1}\varrho'_{n-1} + (\varrho_{n-1}\varrho'_{n-2} + \varrho_{n-2}\varrho'_{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + (\varrho_{n-1}\varrho'_1 + \varrho_{n-2}\varrho'_2 + \ldots + \varrho_2\varrho'_{n-2} + \varrho_1\varrho'_{n-1})$$

für wachsende Werthe von n sich der Grenze Null nähern, und da der Zahlenwerth dieser Summe offenbar größer sein muß, als der der folgenden

$$u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + (u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \ldots + u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1}),$$

so folgt, daß diese letztere, oder, was dasselbe ist, die Differenz $s_n s'_n - s''_n$ ebenfalls sich der Grenze Null nähern wird. Mithin wird ss', welches die Grenze von $s_n s'_n$ ist, auch die von s''_n sein, d. h. die Reihe (9) convergirt, und ihre Summe ist ss'.

Anmerkung. Wenn die Reihen (7) zu convergiren aufhören, sobald ihre Glieder auf ihre Zahlenwerthe reducirt werden, so gilt von ihnen auch der vorhergehende Lehrsatz nicht. Wenn man z. B. für jede der beiden Reihen (7) folgende nimmt.

$$(11)\quad 1, -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}, +\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}, -\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}, +\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}, - \text{ etc.} \ldots$$

so wird die Reihe (9) folgende sein

$$(12)\quad \begin{cases} 1, -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right), +\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2.2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ -\left(\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3.2}}+\frac{1}{\sqrt{2.3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right), + \text{etc.} \end{cases} < x$$

Diese Reihe ist aber divergirend; denn ihr allgemeines Glied, nämlich

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{(n-1)2}}+\frac{1}{\sqrt{(n-2)3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

hat offenbar einen Zahlenwerth, welcher größer ist, als

$$\frac{n}{\left\{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\}^{\frac{1}{2}}} = \left\{\frac{4n}{n+2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

wenn n eine gerade Zahl ist, und größer als

$$\frac{n}{\left\{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{2n}{n+1},$$

wenn n ungerade ist, d. h. dieses allgemeine Glied ist in allen nur möglichen Fällen größer als die Einheit. Indessen ist die Reihe (11) convergirend; hört aber auf es zu sein, wenn jedes Glied auf seinen Zahlenwerth reducirt wird, da sie alsdann in die Reihe (6) des §. 2. übergeht.

§. 4. Von den nach den aufsteigenden ganzen Potenzen einer Veränderlichen geordneten Reihen.

Es sei

$$(1)\quad a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots, a_nx^n, \text{etc.}\ldots$$

eine nach den ganzen und aufsteigenden Potenzen von x geordnete Reihe, in welcher

$$(2)\quad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \text{etc.}\ldots$$

constante positive oder negative Coefficienten bezeichnen; es sei ferner A der der Reihe (2) entsprechende Werth der Größe k, von welcher im vorhergehenden §. die Rede war (s. §. 3. Lehrs. 2.), so wird dieselbe Größe, aber für die Reihe (1) berechnet, Ax

sein. Mithin wird die Reihe (1) convergiren, wenn der Zahlenwerth von $Ax < 1$ ist, d. h. wenn der Zahlenwerth von $x > \frac{1}{A}$ ist. Dagegen wird die Reihe (1) divergiren, wenn der Zahlenwerth von $x > \frac{1}{A}$ ist. Man kann daher folgenden Satz aufstellen:

Lehrsatz 1. Es sei A die Grenze, welcher sich, für zunehmende Werthe von n, die n^{te} Wurzel aus den größten Zahlenwerthen von a_n nähert; so wird die Reihe (1) für alle Werthe von x, welche zwischen den Grenzen

$$x = -\frac{1}{A}, \quad x = +\frac{1}{A}$$

liegen, convergiren; für alle übrigen Werthe divergiren.

Wenn der Zahlenwerth des Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sich einer bestimmten Grenze nähert, so ist diese Grenze (nach Cap. 2. §. 3. Lehrs. 4.) der gesuchte Werth von A. Diese Bemerkung führt uns auf folgenden neuen Satz.

Lehrsatz 2. Wenn für zunehmende Werthe von n der Zahlenwerth des Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sich der Grenze A nähert, so ist die Reihe (1) für alle Werthe von x, welche zwischen den Grenzen

$$-\frac{1}{A}, \quad +\frac{1}{A}$$

liegen, convergirend; für alle Werthe von x dagegen, welche über diese Grenzen hinausfallen, divergirend.

Zusatz 1. Betrachtet man z. B. die Reihe

(3) $\quad 1, 2x, 3x^2, 4x^3, \ldots, (n+1)\,x^n$, etc....

so findet man

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

mithin

$$A = 1,$$

woraus denn folgt: daß die Reihe (2) für alle Werthe, welche zwischen den Grenzen

$$x = -1, \quad x = +1$$

liegen, convergirt, für alle andern divergirt.

Zusatz 2. Betrachtet man ferner die Reihe

$$(4) \quad \frac{x}{1}, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \ldots, \frac{x^n}{n}, \text{ etc.} \ldots$$

in welcher das ganz constante Glied Null ist, so findet man

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

mithin $A = 1$. Die Reihe (4) wird demnach convergiren oder divergiren, je nachdem der Zahlenwerth von x kleiner oder größer als die Einheit sein wird.

Zusatz 3. Ist die Reihe (1) folgende:

$$(5) \begin{cases} 1, \frac{\mu}{1}x, \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2, \ldots \ldots \\ \ldots \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n, \text{ etc.} \ldots \end{cases}$$

wo μ eine beliebige Größe bezeichnet, so findet man

$$\frac{a_{n+1}}{a^n} = \frac{\mu-n}{n+1} = -\frac{1-\frac{\mu}{n}}{1+\frac{1}{n}},$$

mithin

$$A = \lim. \frac{1-\frac{\mu}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = 1,$$

woraus denn folgt, daß die Reihe (5), so wie die Reihen (3) und (4), convergirt oder divergirt, je nachdem der Zahlenwerth von x kleiner oder größer als die Einheit ist.

Zusatz 4. Betrachtet man die Reihe

$$(6) \quad 1, \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3}, \ldots, \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}, \text{ etc.} \ldots$$

so findet man

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1},$$

mithin

$$A = \frac{}{\infty} = 0,$$

woraus denn folgt, daß die Reihe zwischen den Grenzen

$$x = -\frac{1}{0} = -\infty, \quad x = +\frac{1}{0} = +\infty$$

convergirt, d. h. daß sie für alle möglichen Werthe von x convergirt.

Zusatz 5. Wir wollen endlich noch die Reihe

(7) $1, 1.x, 1.2.x^2, 1.2.3.x^3, \ldots, 1.2.3\ldots n.x^n$, etc. ...

betrachten. Wendet man auf diese den zweiten Lehrsatz an, so findet man

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = n + 1, \; A = \infty;$$

mithin $\frac{1}{A} = 0$; woraus denn folgt, daß die Reihe (7) beständig divergirt, außer wenn $x = 0$ ist, in welchem Falle sie sich auf ihr erstes Glied 1 reducirt.

Untersucht man die so eben erhaltenen Resultate, so erkennt man sofort, daß unter den Reihen, welche nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen der Veränderlichen x geordnet sind, einige bald convergiren, bald divergiren, je nachdem x diesen oder jenen Werth hat, während andere, unabhängig von dem Werthe von x, ausgenommen, wenn $x = 0$ ist, beständig convergiren oder divergiren. Der erste Lehrsatz läßt also nur dann Zweifel über die Convergenz einer solchen Reihe übrig, wenn der Zahlenwerth von x der constanten positiven Größe gleich ist, welche wir durch $\frac{1}{A}$ bezeichnet haben, d. h. wenn man

$$x = \pm \frac{1}{A}$$

annimmt. In diesem besonderen Falle ist die Reihe bald convergirend, bald divergirend, und die Convergenz hängt zuweilen

von dem Zeichen der Veränderlichen x ab. Setzt man z. B., in der Reihe (4), für welche $A = 1$ ist, successive

$$x = +1, \quad x = -1,$$

so erhält man die Reihen

$$(8) \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \text{ etc.} \ldots$$

$$(9) \quad -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{4}, \ldots, \pm\frac{1}{n}, \text{ etc.} \ldots$$

von welchen die erste divergirt (s. §. 2. Lehrs. 3. Zus.), die zweite convergirt (s. §. 3. Lehrs. 3.).

Es muß durchaus noch bemerkt werden, daß, wenn nach dem ersten Lehrsatze eine, nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen der Veränderlichen x geordnete, Reihe für einen von Null verschiedenen Zahlenwerth convergirt, sie auch convergiren muß, wenn man diesen Zahlenwerth vermindert; ja sogar, wenn er unendlich klein wird.

Wenn zwei nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von x geordnete Reihen, für einen und denselben Werth der Veränderlichen, convergiren, so können die Lehrsätze 5. und 6. des §. 3. auf dieselben angewandt werden. Hieraus ergeben sich folgende zwei Lehrsätze:

Lehrsatz 3. Gesetzt, die beiden Reihen

$$(10) \begin{cases} a_0, a_1x, a_2x^2, a_3x^3, \ldots, a_nx^n, \text{ etc.} \ldots \\ b_0, b_1x, b_2x^2, b_3x^3, \ldots, b_nx^n, \text{ etc.} \ldots \end{cases}$$

seien beide convergirend, wenn man für x einen gewissen Werth setzt, und ihre Summen seien respective s und s', so ist für denselben Fall auch

$$(11) \quad a_0+b_0, (a_1+b_1)x, (a_2+b_2)x^2, \ldots, (a_n+b_n)x^n, \text{ etc.} \ldots$$

eine convergirende Reihe, deren Summe $s+s'$ ist.

Zusatz. Man kann diesen Lehrsatz auf eine beliebige Anzahl von Reihen ausdehnen. Wenn z. B. drei Reihen

$$a_0, a_1x, a_2x^2, \text{ etc.} \ldots,$$
$$b_0, b_1x, b_2x^2, \text{ etc.} \ldots,$$
$$c_0, c_1x, c_2x^2, \text{ etc.} \ldots,$$

für einen und denselben Werth von x convergiren, und wenn

man ihre Summen durch s, s′, s″ bezeichnet, so wird auch die Reihe

$$a_0+b_0+c_0,\ (a_1+b+c_1)x,\ (a_2+b_2+c_2)x^2,\ \text{etc.}....$$

convergiren, und ihre Summe wird $s+s'+s''$ sein.

Lehrsatz 4. Wenn unter denselben Voraussetzungen, welche im vorigen Lehrsatze stattfanden, eine jede der beiden Reihen (10) auch dann noch convergirt, wenn man ihre Glieder auf deren Zahlenwerthe reducirt, so wird auch die Reihe

$$(12)\begin{cases} a_0b_0,\ (a_0b_1+a_1b_0)x,\ (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2,\ldots \\ \ldots(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots.a_{n-1}b_1+a_nb_0)x^n,\ \text{etc.}.... \end{cases}$$

convergiren, und ihre Summe wird ss' sein.

Zusatz 1. Der vorhergehende Lehrsatz ist mit in der Formel

$$(13)\begin{cases} (a_0+a_1x+a_2x^2+\text{etc.}....)\,(b_0+b_1x+b_2x^2+\text{etc.}....) \\ =a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2 \\ +\ \text{etc.}..... \end{cases}$$

begriffen, welche dann gilt, wenn jede der beiden Reihen (10) convergirt, selbst wenn man deren Glieder auf ihre Zahlenwerthe reducirt, und nach welcher man in diesem Falle eine Reihe von derselben Form entwickeln kann, deren Summe dem Producte der Summen jener beiden Reihen gleich ist.

Zusatz 2. Wiederholt man mehrmals hintereinander die durch die Gleichung (13) angedeutete Operation, so kann man die Summen von drei oder mehreren Reihen, welche mit den Reihen (10) gleichartig sind, und welche insgesammt convergirend bleiben, wenn man die Glieder derselben auf deren Zahlenwerthe reducirt, mit einander multipliciren. Das Product gibt die Summe einer neuen convergirenden und nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von x geordneten Reihe.

Zusatz 3. Wenn die Reihen, deren Summen in den beiden vorhergehenden Zusätzen mit einander multiplicirt wurden, einander gleich sind, so ist das Product eine ganze Potenz der Summe einer jeden, und diese Potenz wird gleichfalls durch

eine Reihe von derselben Form ausgedrückt werden. Setzt man z. B. in (13)

$a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, etc. . . . ., so erhält man

$$(14)\quad \begin{cases} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.} \ldots)^2 \\ = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (2a_0 a_1 + a_1^2) x^2 + \text{etc.} \ldots \end{cases}$$

Zusatz 4. Setzt man die allgemeinen Glieder der Reihen (10) gleich

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^n,$$

und $$\frac{\mu'(\mu'-1)(\mu'-2)\ldots(\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^n,$$

wo μ und μ' zwei beliebige Größen sind, die Veränderliche x aber zwischen den Grenzen $x = -1$ und $x = +1$ liegt, so wird jede der beiden Reihen (10) auch dann noch convergiren, wenn man die Glieder derselben auf deren Zahlenwerthe reducirt, und das allgemeine Glied der Reihe (12) wird

$$\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n} + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{\mu'}{1} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\mu'(\mu'-1)\ldots(\mu'-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{\mu'(\mu'-1)\ldots(\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n} \right] x^n$$

$$= \frac{(\mu+\mu')(\mu+\mu'-1)\ldots(\mu+\mu'-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^n.$$

Bezeichnet man demnach in dem angenommenen Falle durch $\varphi(\mu)$ die Summe der ersten von den beiden Reihen (10), setzt man also

$$(15)\quad \varphi(\mu) = 1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2 + \text{etc.} \ldots$$

so werden die Summen der Reihen (10) und (12) respective durch $\varphi(\mu)$, $\varphi(\mu')$ und $\varphi(\mu+\mu')$ zu bezeichnen sein, und die Gleichung (13) wird sich verwandeln in

$$(16)\quad \varphi(\mu) \cdot \varphi(\mu') = \varphi(\mu+\mu').$$

Wenn man in der Gleichung (13) statt der Reihe

$$b_0, b_1 x, b_2 x^2, \text{ etc.} \ldots.$$

ein Polynom setzt, welches aus einer endlichen Anzahl von

Gliedern besteht, so erhält man eine Formel, welche so lange gilt, als die Reihe

$$a_0, a_1x, a_2x^2, \text{etc.}\ldots$$

convergirt. Wir wollen dieses direct beweisen und deshalb folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 5. Wenn die Reihe (1) convergirt, und man multiplicirt ihre Summe durch das Polynom

$$(17) \qquad kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q,$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet, so ist das Product gleichfalls eine convergirende Reihe von derselben Form, deren allgemeines Glied

$$(qa_n + pa_{n-1} + \ldots + la_{n-m+1} + ka_{n-m})x^m,$$

ist; vorausgesetzt, daß man in den ersten Gliedern diejenigen von den Größen

$$a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots . a_{n-m+1}, a_{n-m},$$

deren Index negativ wird, gleich Null setzt. Man wird demnach haben

$$(18) \quad \begin{cases} (kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q) \times (a_o + a_1x + a_2x^2 + \text{etc..}) \\ = qa_o + (qa_1 + pa_o)x + \ldots + (qa_m + pa_{m-1} + \ldots \\ \ldots + la_1 + ka_o)x^m \quad + \text{etc.}\ldots\ldots \\ \hline + (qa_n + pa_{n-1} + \ldots + la_{n-m+1} + ka_{n-m})x^n + \text{etc.}\ldots \end{cases}$$

Beweis. Um die Summe der Reihe (1) durch das Polynom (17) zu multipliciren, hat man nichts weiter zu thun, als daß man sie mit allen Gliedern dieses Polynoms successive multiplicirt. So erhält man

$$(kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q)(a_o + a_1x + a_2x^2 + \text{etc.}\ldots.)$$
$$= q(a_o + a_1x + a_2x^2 + \text{etc.}\ldots) + px(a_o + a_1x + a_2x^2 + \text{etc.}\ldots)$$
$$+ \text{etc.}\ldots\ldots$$
$$+ lx^{m-1}(a_o + a_1x + a_2x^2 + \text{etc.}\ldots) + kx^m(a_o + a_1x + a_2x^2 + \text{etc.}\ldots).$$

Da man aber für beliebige ganze Werthe von n haben wird

$$q(a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1})$$
$$= qa_o + qa_1x + qa_2x^2 + \ldots + qa_{n-1}x^{n-1},$$

so folgt, wenn $n = \infty$ wird,

$$q(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}...) = qa_0 + qa_1 x + qa_2 x^2 + \text{etc.}...,$$

so wie auch

$$px(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}.....)$$
$$= pa_0 x + pa_1 x + pa_2 x^2 + \text{etc.}...,$$
$$\text{etc.}.....$$
$$lx^{m-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}.....)$$
$$= la_0 x^{m-1} + la_1 x^m + la_2 x^{m+2} + \text{etc.}...,$$
$$kx^m(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}...)$$
$$= ka_0 x^m + ka_1 x^{m+1} + ka_2 x^{m+2} + \text{etc.}...$$

Addirt man alle diese Gleichungen, und zieht man in der Summe der zweiten Theile immer die Coefficienten einer jeden Potenz von x zusammen, so erhält man genau die Gleichung (18).

Gesetzt, es nimmt in der Reihe (1), x beständig, aber unmerklich ab, so wird die Summe der Reihe (nach §. 1. Lehrs. 1.), so lange sie convergirt, d. h. so lange der Werth von x zwischen den Grenzen

$$-\frac{1}{A}, +\frac{1}{A}$$

liegt, eine stetige Function von x sein.

Es sei $\varphi(x)$ diese stetige Function, so wird die Gleichung

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}....$$

für alle Werthe von x gelten, welche zwischen den Grenzen $-\frac{1}{A}, +\frac{1}{A}$ liegen, was wir dadurch andeuten wollen, daß wir diese Grenzen neben die Gleichung hinschreiben, also durch

$$(19)\quad \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}.... \quad \left\{\begin{matrix} x = -\frac{1}{A} \\ x = +\frac{1}{A} \end{matrix}\right\}.$$

Wenn die Reihe gegeben ist, so kann man zuweilen den Werth der Function $\varphi(x)$, unter der Form eines endlichen Ausdrucks, daraus ableiten. Gewöhnlich aber ist $\varphi(x)$ gegeben, und man will von dieser auf die Reihe zurückgehen, oder, mit andern Worten: man will diese Function in eine nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von x geordnete

Reihe entwickeln. In Beziehung auf diese Operation läßt sich folgender Satz aufstellen.

Lehrsatz 6. Eine stetige Function der Veränderlichen x kann nur auf eine Art in eine convergirende, nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von x geordnete Reihe entwickelt werden.

Beweis. Gesetzt, man hätte $\varphi(x)$ nach zwei durchaus verschiedenen Methoden entwickelt, und es seien

$$a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots, a_nx^n, \text{ etc.}\ldots,$$
$$b_0, b_1x, b_2x^2, \ldots, b_nx^n, \text{ etc.}\ldots,$$

diese beiden Entwickelungen, d. h. zwei Reihen, welche beide für von Null verschiedene Werthe convergiren, und deren beiderseitige Summe, so lange sie convergiren, $\varphi(x)$ ist; so hat man, da beide Reihen für sehr kleine Zahlenwerthe von x beständig convergiren, für je einen und denselben Werth von x

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \text{etc.}\ldots = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \text{etc.}\ldots$$

Setzt man $x = 0$, so erhält man aus dieser Gleichung

$$a_0 = b_0,$$

woraus denn folgt, daß man allgemein

$$a_1x + a_2x^2 + \text{etc.}\ldots = b_1x + b_2x^2 + \text{etc.}\ldots$$

setzen kann, oder, was dasselbe ist,

$$x(a_1 + a_2x + \text{etc.}\ldots) = x(b_1 + b_2x + \text{etc.}\ldots)$$

Multiplicirt man beide Theile dieser Gleichung mit $\frac{1}{x}$, so erhält man

$$a_1 + a_2x + \text{etc.}\ldots = b_1 + b_2x + \text{etc}\ldots;$$

und setzt man hier $x = 0$,

$$a_1 = b_1.$$

Auf dieselbe Weise läßt sich zeigen, daß die Constanten a_0, a_1, a_2, etc.... respective den Constanten b_0, b_1, b_2, etc.... gleich sind; woraus denn folgt, daß beide Reihenentwickelungen identisch sind.

Die Differentialrechnung liefert sehr bequeme Methoden für die Reihenentwickelung der Functionen, welche wir späterhin auseinandersetzen werden. Gegenwärtig wollen wir uns darauf beschränken, neben der Reihenentwickelung von $(1+x)^\mu$ noch

zwei andere mitzutheilen, welche sehr leicht auf jene zurückgeführt werden können, nämlich die der Functionen

$$A^x \text{ und } L(1+x),$$

wo A eine positive Constante bezeichnet, L dagegen das Zeichen der Logarithmen eines beliebigen Systems ist. Wir wollen die drei Aufgaben der Reihe nach auflösen.

Aufgabe 1. Es soll, wenn es möglich ist, die Function

$$(1+x)^\mu$$

in eine nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von x geordnete Reihe aufgelöst werden.

Auflösung. Setzt man zuvörderst $\mu = m$, wo m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, so hat man nach der Newton'schen Binomialformel

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.}\ldots.$$

Die Reihe, welche den zweiten Theil dieser Gleichung bildet, besteht immer aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, wenn aber für m eine beliebige Größe gesetzt wird, so wird die Reihe, welche man in diesem Falle erhält, nämlich

$$(5) \qquad 1, \frac{\mu}{1}x, \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2, \text{etc.}\ldots$$

aus einer unbestimmten Anzahl von Gliedern bestehen und nur dann convergiren, wenn $x < 1$ ist. Es sei in diesem Falle $\varphi(\mu)$ die Summe der neuen Reihe, also

$$(15) \quad \varphi(\mu) = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.}\ldots. \begin{Bmatrix} x=-1 \\ x=+1 \end{Bmatrix},$$

so wird nach §. 1., Lehrsatz 1. $\varphi(\mu)$ eine stetige Function von μ zwischen beliebigen Grenzen dieser Veränderlichen sein, und man hat, nach Lehrs. 4. Zus. 4. dieses §.,

$$(16) \qquad \varphi(\mu) \cdot \varphi(\mu') = \varphi(\mu+\mu').$$

Diese Gleichung wird, da sie der Gleichung (2), Cap. 5. §. 1., vollkommen ähnlich ist, auch auf dieselbe Weise aufgelöst werden können, und so erhält man denn

$$\varphi(\mu) = [\varphi(1)]^\mu = (1+x)^\mu.$$

Wenn man diesen Werth von $\varphi(\mu)$ in (15) substituirt, so

findet man, daß man für alle zwischen den Grenzen $x = -1$, $x = +1$ liegenden Werthe von x haben wird

$$(20)\quad (1+x)^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \text{etc.} \ldots \left\{\begin{matrix} x=-1 \\ x=+1 \end{matrix}\right\}.$$

Wenn der Zahlenwerth von x größer als die Einheit ist, so hört die Reihe (5) auf zu convergiren und eine Summe zu haben, und alsdann gilt auch die Gleichung (20) nicht mehr. In diesem Falle ist es unmöglich, wie später mit Hülfe des Differentialcalculs gezeigt werden wird, die Function $(1+x)^{\mu}$ in eine nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von x geordnete Reihe zu entwickeln.

Zusatz 1. Setzt man in der Gleichung (20) $\frac{1}{\alpha}$ für μ und αx für x, wo α ein unendlich Kleines bezeichnet, so hat man für alle Werthe von αx, welche zwischen -1 und $+1$ liegen, oder, was dasselbe ist, für alle Werthe von x, welche zwischen $-\frac{1}{\alpha}$, $+\frac{1}{\alpha}$ liegen,

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2}(1-\alpha) + \frac{x^3}{1.2.3}(1-\alpha)(1-2\alpha) + \text{etc.} \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{matrix} x = -\frac{1}{\alpha} \\ x = +\frac{1}{\alpha} \end{matrix}\right\}.$$

Da diese Gleichung immer gelten muß, wie klein auch der Zahlenwerth von α sein mag, so findet man, wenn man für α seine Grenze setzt, d. h. wenn man im zweiten Theile der zuletzt gefundenen Gleichung $\alpha = 0$ setzt,

$$(21)\quad \begin{cases} \lim.(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.} \ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots \left\{\begin{matrix} x = -\infty \\ x = +\infty \end{matrix}\right\}. \end{cases}$$

Es bleibt uns nur noch übrig, die Grenze von $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$ zu suchen. Nun erhält man aber aus der vorhergehenden Formel

$$\lim.\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}\ldots,$$

oder mit andern Worten

$$(22) \qquad \lim.\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e,$$

wo e die Grundzahl der natürlichen oder Neper'schen Logarithmen ist (s. §. 1., Gleich. 6.). Hieraus folgt denn unmittelbar

$$\lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}} = e,$$

mithin auch

$$\lim.(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim.\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^{x} = e^{x}.$$

Substituirt man für $\lim.\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$ den eben gefundenen Werth in (20), so erhält man

$$(23)\quad e^{x} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\ldots \begin{Bmatrix} x=-\infty \\ x=+\infty \end{Bmatrix}.$$

Man kann die Gleichung (23) direct erhalten, wenn man erwägt, daß die Reihe

$$(6)\quad 1, \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3}, \text{etc.}\ldots,$$

für alle möglichen Werthe von x convergirt, und wenn man, hiervon ausgehend, diejenige Function von x sucht, welche die Summe der Reihe ausdrückt. Es sei daher $\varphi(x)$ die Summe der Reihe (6), deren allgemeines Glied

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

ist, $\varphi(y)$ dagegen die Summe der Reihe, deren allgemeines Glied

$$\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}$$

ist, so wird nach §. 3., Lehrs. 6. das Product beider Summen ebenfalls die Summe einer Reihe sein, deren allgemeines Glied folgendes ist,

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{y}{1} + \ldots + \frac{x}{1}\cdot\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{y^n}{1.2.3\ldots n} = \frac{(x+y)^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Dieses Product ist also gleich $\varphi(x+y)$. Setzt man demnach

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.} \ldots$$

so leistet $\varphi(x)$ der Gleichung

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x+y)$$

Genüge, und löst man diese auf, so erhält man

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^x = \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}\ldots\right)^x,$$

d. h. $\varphi(x) = e^x$.

Zusatz 2. Zieht man zuvörderst von beiden Theilen der Gleichung (20), 1 ab, und dividirt man sodann beide Theile durch μ, so erhält man eine Gleichung, welcher man folgende Form geben kann:

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x - \frac{x^2}{2}(1-\mu) + \frac{x^3}{3}(1-\mu)(1-\tfrac{1}{2}\mu) - \text{etc.} \ldots$$

$$\ldots\ldots \left\{\begin{matrix} x = -1 \\ x = +1 \end{matrix}\right\};$$

und wenn man in dieser Gleichung μ sich der Grenze Null nähern läßt und die Grenze der Function bestimmt, welche dem Werthe $x = 0$ entspricht, so findet man

$$(24) \quad \lim. \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.} \ldots$$

Ist nun l das Zeichen der natürlichen Logarithmen (also für die Grundzahl e), so hat man offenbar

$$1 + x = e^{l(1+x)},$$

$$(1+x)^\mu = e^{\mu l(1+x)} = 1 + \frac{\mu l(1+x)}{1} + \frac{\mu^2 [l(1+x)]^2}{1.2} + \text{etc.},$$

woraus denn folgt

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = l(1+x) + \frac{\mu}{2}[l(1+x)]^2 + \text{etc.};$$

mithin

$$(25) \quad \lim. \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = l(1+x).$$

Die Formel (24) verwandelt sich also in

$$(26)\quad 1(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.}\ldots \left\{\begin{matrix} x=-1 \\ x=+1 \end{matrix}\right\}.$$

Diese Gleichung gilt also, so lange der Zahlenwerth von x kleiner als 1 ist, und in diesem Falle convergirt sowohl die Reihe

$$(27)\quad x, -\frac{x^2}{2}, +\frac{x^3}{3}, \ldots., \pm\frac{x^n}{n}, \text{etc.}\ldots.,$$

als auch die Reihe (4), die nur dadurch sich von jener unterscheidet, daß die geraden Glieder das entgegengesetzte Zeichen haben. Beide Reihen werden aber divergirend, wenn der Zahlenwerth von x größer als 1 ist, und die Gleichung (26) gilt daher für diesen Fall nicht.

Setzt man $x = 1$, so verwandelt sich die Reihe (27) in die Reihe (3) des dritten Paragraphen, welche convergirt, wie gezeigt worden ist. Die Gleichung (26) gilt also auch für diesen Fall, und es ist daher

$$(28)\quad 1(2) = 1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}\ldots.$$

Setzt man dagegen $x = -1$, so divergirt die Reihe (27) und hat keine Summe mehr.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß, wenn man zuvörderst in (26) $x = -1$ setzt und sodann in beiden Theilen zugleich die Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt, man folgende Gleichung erhält:

$$(29)\quad 1\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \text{etc.}\ldots \left\{\begin{matrix} x=-1 \\ x=+1 \end{matrix}\right\}.$$

Aufgabe 2. Die Function

$$A^x$$

(wo A eine beliebige Zahl bezeichnet) in eine nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von x geordnete Reihe zu entwickeln.

Auflösung. Wenn 1 dieselbe Bedeutung behält, welche dieser Buchstabe bei Auflösung der vorigen Aufgabe hatte, so ist (wie aus der Definition der Logarithmen folgt)

$$A = e^{1(A)},$$

woraus denn folgt

$$(30) \qquad A^x = e^{x\,l\,(A)}$$

Mithin ergibt sich aus der Gleichung (23)

$$A^x = 1 + \frac{x\,l\,A}{1} + \frac{x^2\,(l\,A)^2}{1.2} + \frac{x^3\,(l\,A)^3}{1.2.3} + \text{etc.} \ldots$$

$$\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} x = -\infty \\ x = +\infty \end{matrix} \right\},$$

eine Formel, welche für alle reellen Werthe von x gilt.

Aufgabe 3. Wenn L das Zeichen der Logarithmen in demjenigen Systeme ist, dessen Grundzahl A ist, so soll, wenn es möglich ist, die Function

$$L\,(1+x)$$

in eine nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von x geordnete Reihe entwickelt werden.

Auflösung. Hat auch bei dieser Aufgabe der Buchstabe l dieselbe Bedeutung, welche er in den beiden vorigen hatte, so folgt aus den bekannten Eigenschaften der Logarithmen

$$L\,(1+x) = \frac{l\,(1+x)}{l\,(A)};$$

mithin ergibt sich aus der Gleichung (26) für alle zwischen -1 und $+1$ liegenden Werthe von x

$$(32)\ L(1+x) = \frac{1}{l(A)}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.}\ldots\right] \ldots \left\{ \begin{matrix} x = -1 \\ x = +1 \end{matrix} \right\},$$

eine Formel, welche sogar für den Fall $x = 1$ gilt, aber für $x = -1$ und $x > 1$ zu gelten aufhört.

Siebentes Capitel.

Von den imaginären Ausdrücken und ihren Modulis.

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die imaginären Ausdrücke.

Einen symbolischen Ausdruck oder ein Symbol nennt man in der Analysis jede Verbindung algebraischer Zeichen, welche an und für sich selbst keine Bedeutung hat, oder welcher man einen andern Werth beilegt, als sie natürlicherweise haben sollte. Symbolische Gleichungen nennt man diejenigen Gleichungen, welche, buchstäblich genommen, oder nach den allgemein angenommenen Bezeichnungsarten in Worte übersetzt, entweder keine genauen Werthe geben, oder gar keinen Sinn haben; aus welchen man aber genaue Resultate herleiten kann, wenn man entweder die Gleichungen selbst, oder die Symbole, welche sie enthalten, nach bestimmten Regeln modificirt oder abändert. Die Anwendung symbolischer Ausdrücke oder Gleichungen dient oft zur Abkürzung und Vereinfachung der Rechnungen und bietet eine kürzere Form für scheinbar verwickelte Resultate dar. Wir haben bereits (Cap. 3., §. 3., wo die Formel (9) einen sehr einfachen symbolischen Werth für die Unbekannte x, welche den Gleichungen (4) Genüge leisten soll, darbietet) ein Beispiel dieser Art gehabt. Unter den symbolischen Ausdrücken oder Gleichungen, deren Betrachtung in der Analysis von Wichtigkeit ist, stehen diejenigen, welche man imaginäre Größen genannt hat, oben an. Wir wollen zeigen, wie man in den Fall kommen kann, von ihnen Gebrauch zu machen.

Man weiß, daß durch die Formeln

$$(1)\begin{cases}\cos.(a+b)=\cos.a\,.\cos.b-\sin.a\,.\sin.b,\\ \sin.(a+b)=\sin.a\,.\cos.b+\cos.a\,.\sin.b\end{cases}$$

Sinus und Cosinus des Bogens $a+b$ als Functionen der Bogen a und b gegeben sind. Wollte man sich aber nicht die Mühe geben, diese Formeln zu behalten, so gäbe es ein sehr leichtes Mittel, sie wiederzufinden, so oft man ihrer bedarf.

Gesetzt nämlich, man multiplicirt die beiden symbolischen Ausdrücke:

$$\cos.a+\sqrt{-1}\,.\sin.a,$$
$$\cos.b+\sqrt{-1}\,.\sin.b$$

mit einander nach den bekannten Regeln für die algebraische Multiplication und behandelt dabei $\sqrt{-1}$ wie eine reelle Größe, deren Quadrat -1 wäre; so wird das Product aus zwei Theilen bestehen, von welchen der eine ganz reell ist, der andere dagegen den Factor $\sqrt{-1}$ hat. Der reelle Theil gibt alsdann den Werth von $\cos.(a+b)$, der Coefficient von $\sqrt{-1}$ aber den Werth von $\sin.(a+b)$.

Man findet also

$$(2)\begin{cases}\cos.(a+b)+\sqrt{-1}\,.\sin.(a+b)\\ =(\cos.a+\sqrt{-1}\sin.a)(\cos.b+\sqrt{-1}\sin.b).\end{cases}$$

Die drei Ausdrücke, welche diese Gleichung enthält, nämlich

$$\cos.a+\sqrt{-1}\sin.a,$$
$$\cos.b+\sqrt{-1}\sin.b,$$
$$\cos.(a+b)+\sqrt{-1}\sin.(a+b)$$

sind drei symbolische Ausdrücke, welche, nach den allgemein angenommenen Bezeichnungsarten in Worte übersetzt, gar keinen Sinn haben. Man hat sie imaginäre Ausdrücke (unmögliche Größen) genannt. Auch die Gleichung (2) selbst hat keinen Sinn, wenn sie buchstäblich genommen wird. Sollen sich aus ihr genaue Resultate ergeben, so muß zuvörderst ihr zweiter Theil durch die algebraische Multiplication entwickelt werden, wodurch sich die Gleichung in folgende verwandelt:

$$(3)\begin{cases}\cos.(a+b)+\sqrt{-1}\sin.(a+b)=\cos.a\,.\cos.b\\ -\sin.a\,.\sin.b+\sqrt{-1}(\sin.a\,.\cos.b+\sin.b\,.\cos.a);\end{cases}$$

hierauf muß in (3) der mögliche Theil des ersten Theiles dem möglichen Theile des zweiten, und der Coefficient von $\sqrt{-1}$ im ersten Theile dem Coefficienten von $\sqrt{-1}$ im zweiten Theile gleichgesetzt werden. So kommt man auf die Gleichungen (1) zurück, welche demnach beide als in der Formel (2) enthalten angesehen werden können.

Im Allgemeinen nennt man imaginäre Ausdrücke (unmögliche Größen) jeden symbolischen Ausdruck von der Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, wo α, β reelle Größen bezeichnen, und man sagt: zwei imaginäre Ausdrücke

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \gamma+\delta\sqrt{-1}$$

sind einander gleich, wenn 1) die reellen Theile α und γ 2) die Coefficienten von $\sqrt{-1}$, also β und δ einander gleich sind. Die Gleichheit zweier imaginären Ausdrücke deutet man eben so, wie die zweier möglichen Größen, durch das Zeichen $=$ an, und es entsteht dann eine sogenannte imaginäre Gleichung. Die symbolische Gleichung

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\gamma+\delta\sqrt{-1}$$

begreift folgende zwei reelle Gleichungen in sich:

$$\alpha=\gamma,\quad \beta=\delta.$$

Verschwindet in dem imaginären Ausdrucke

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}$$

der Coefficient β, so nimmt man an, daß Glied $\beta\sqrt{-1}$ sei Null, und der Ausdruck selbst der reellen Größe α gleich. Dieser Annahme gemäß sind die möglichen Ausdrücke in den unmöglichen Ausdrücken mitbegriffen.

Die imaginären Ausdrücke können, eben so gut als die möglichen Größen, den verschiedenen algebraischen Operationen unterworfen werden. Verfährt man also bei der Addition, der Subtraction oder der Multiplication mit zweien oder mehreren imaginären Ausdrücken nach den für die Rechnung mit reellen Größen gefundenen Regeln, so ist das Resultat gleichfalls ein imaginärer Ausdruck und wird ebenfalls die Summe, die Dif-

ferenz oder das Product der gegebenen Ausdrücke genannt, und man bedient sich der gewöhnlichen Bezeichnungen, um diese Summe oder Differenz, oder dieses Product anzudeuten. Sind z. B. die beiden imaginären Ausdrücke

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \gamma + \delta\sqrt{-1},$$

gegeben, so findet man

$$(4)\quad (\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\alpha+\gamma+(\beta+\delta)\sqrt{-1},$$

$$(5)\quad (\alpha+\beta\sqrt{-1})-(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\alpha-\gamma+(\beta-\delta)\sqrt{-1},$$

$$(6)\quad (\alpha+\beta\sqrt{-1})\times(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{-1}.$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß das Product zweier oder mehrerer imaginären Ausdrücke, so wie das Product zweier oder mehrerer reellen Binomien immer dasselbe bleibt, in welcher Ordnung auch die Factoren auf einander folgen mögen.

Einen imaginären Ausdruck durch einen andern dividiren, heißt: einen dritten Ausdruck finden, welcher, mit dem zweiten multiplicirt, den ersten gibt.

Das Resultat dieser Operation ist der Quotient der beiden gegebenen Ausdrücke. Man deutet diesen Quotienten durch das gewöhnliche Divisionszeichen an. So z. B. drückt

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}}$$

den Quotienten aus, welchen man erhält, wenn man $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ durch $\gamma + \delta\sqrt{-1}$ dividirt.

Einen imaginären Ausdruck auf die m^{te} Potenz erheben, heißt: das Product von m Factoren bilden, von welchen jeder diesem Ausdrucke gleich ist.

Die m^{te} Potenz von $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ wird durch

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^m$$

angedeutet.

Die n^{te} Wurzel aus dem imaginären Ausdrucke $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ ausziehen, oder, was dasselbe ist, diesen Ausdruck auf die $\frac{1}{n}$-te Potenz erheben (wo n eine beliebige ganze Zahl ist), heißt: einen imaginären Ausdruck finden, dessen n^{te} Potenz $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ ist. Da diese Aufgabe mehrere Auflösungen zu-

läßt (s. §. 4.), so folgt, daß $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ mehrere n^{te} Wurzeln hat. Wenn wir (ohne Unterschied) irgend eine von diesen Wurzeln andeuten wollen, werden wir uns der Bezeichnung

$$\sqrt[n]{\alpha + \beta\sqrt{-1}}$$

oder der folgenden

$$((\alpha + \beta\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}}$$

bedienen.

Sollte $\beta = 0$ sein, so reducirt sich $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ auf die mögliche Größe α und muß alsdann unter den Werthen von

$$\sqrt[n]{a} = ((a))^{\frac{1}{n}}$$

einer, oder es können sogar zwei derselben, wie man weiter unten sehen wird, reell sein.

Außer den ganzen Potenzen imaginärer Ausdrücke und den ihnen entsprechenden Wurzeln kommen oft auch ihre gebrochenen und ihre negativen Potenzen vor. Man hat hierbei Folgendes zu bemerken:

Um einen imaginären Ausdruck $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ auf die $\frac{m}{n}$te Potenz zu erheben, muß man (nachdem man, wenn es nöthig sein sollte, den Bruch $\frac{m}{n}$ auf die kleinsten Zahlen reducirt hat), 1) die n^{te} Wurzel aus dem gegebenen Ausdrucke ausziehen und 2) diese Wurzel auf die m^{te} Potenz erheben. Da, wie §. 4. gezeigt werden wird, die Aufgabe auf mehrfache Weise aufgelöst werden kann, so werden wir, so oft wir einen beliebigen Werth dieser $\frac{m}{n}$ten Potenz andeuten wollen, uns der Bezeichnung

$$((\alpha + \beta\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}$$

bedienen. Tritt der Fall ein, daß $\beta = 0$ wird, so kann einer der Potenzwerthe, oder es können sogar zwei derselben reell werden. Den imaginären Ausdruck $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ auf die $(-m)^{te}$ Potenz erheben, oder auf die $-\frac{1}{n}$te, $-\frac{m}{n}$te, heißt: die Ein-

heit durch die m^{te}, oder durch die $\frac{1}{n}$te, oder $\frac{m}{n}$te Potenz eben dieses Ausdrucks dividiren. Da die Aufgabe im ersten Falle nur eine Auflösung zuläßt, in den beiden letzten Fällen dagegen mehrere, so wollen wir die — m^{te} Potenz durch

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{-m},$$

die beiden andern Potenzen dagegen, so oft wir keinen bestimmten Werth derselben im Sinne haben, durch

$$((\alpha + \beta\sqrt{-1}))^{-\frac{1}{n}} \text{ und } ((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{-\frac{m}{n}}$$

bezeichnen.

Man nennt zwei imaginäre Ausdrücke gepaart *), wenn dieselben nur in Ansehung des Zeichens des Coefficienten von $\sqrt{-1}$ verschieden sind. Die Summe solcher Ausdrücke, desgleichen ihr Product ist stets reell. Die Summe der beiden gepaarten imaginären Ausdrücke

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

ist 2α, ihr Product $\alpha^2 + \beta^2$. Der letzte Theil gegenwärtiger Bemerkung führt auf folgenden Satz, welcher sich auf die Eigenschaften der Zahlen bezieht.

Lehrsatz 1. Wenn man zwei ganze Zahlen, wovon jede die Summe zweier Quadrate ist, mit einander multiplicirt, so ist das Product gleichfalls die Summe zweier Quadrate.

Beweis. Es seien

$$\alpha^2 + \beta^2,\ \alpha'^2 + \beta'^2$$

die beiden erwähnten Zahlen; α^2, β^2, α'^2, β'^2 also vollständige Quadrate, so hat man offenbar die beiden Gleichungen

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,(\alpha'+\beta'\sqrt{-1}) = \alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\sqrt{-1},$$
$$(\alpha-\beta\sqrt{-1})\,(\alpha'-\beta'\sqrt{-1}) = \alpha\alpha' - \beta\beta' - (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\sqrt{-1};$$

und multiplicirt man die gleichvielsten Theile dieser beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$(7)\quad (\alpha^2+\beta^2)\,(\alpha'^2+\beta'^2) = (\alpha\alpha' \mp \beta\beta')^2 + \alpha\beta' + \alpha'\beta)^2.$$

---

*) Expressions imaginaires conjuguées.

Vertauscht man in dieser Gleichung die Buchstaben α' und β', so findet man

$$(8)\quad (\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)=\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2.$$

Es gibt also zwei verschiedene Arten, das Product zweier ganzen Zahlen, von welchen jede die Summe zweier Quadrate ist, in zwei Quadrate zu zerlegen. So z. B. erhält man aus (7) und (8)

$$(2^2+1)(3^2+2^2)=4^2+7^2=1^2+8^2.$$

Man ersieht aus diesen Betrachtungen, daß die Anwendung der imaginären Ausdrücke nicht allein in der gemeinen Algebra, sondern auch in der Theorie der Zahlen von großem Nutzen sein kann.

Oft bezeichnet man einen imaginären Ausdruck durch einen einzigen Buchstaben, wovon auch wir in der Folge Gebrauch machen werden.

§. 2. Von den Modulis der imaginären Ausdrücke und von den reducirten Ausdrücken *).

Eine merkwürdige Eigenschaft jedes imaginären Ausdrucks $\alpha+\beta i$ ist die, daß er unter die Form

$$\varrho\,(\cos.\,\theta+i\sin.\,\theta)$$

gebracht werden kann, wo ϱ eine positive Größe, und θ einen reellen Bogen bezeichnet. Setzt man nämlich

$$(1)\qquad \alpha+\beta i=\varrho\,(\cos.\,\theta+i\sin.\,\theta),$$

oder, was dasselbe ist,

$$(2)\quad \begin{cases}\alpha=\varrho\cos.\,\theta,\\ \beta=\varrho\sin.\,\theta,\end{cases}$$

so erhält man

$$\alpha^2+\beta^2=\varrho^2(\cos.\,\theta^2+\sin.\,\theta^2)=\varrho^2,$$

$$(3)\qquad \varrho=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)};$$

und hat man auf diese Weise den Werth von ϱ bestimmt, so

---

*) Nach dem Beispiele von Gauß u. A. wollen wir (der Kürze wegen) in diesem und den folgenden Capiteln den imaginären Ausdruck $\sqrt{-1}$ immer durch i bezeichnen.

hat man, um der Gleichung (2) völlig Genüge zu leisten, nur noch einen Bogen θ zu suchen, dessen Cosinus und Sinus respective

$$(4)\quad \begin{cases} \cos.\ \theta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}, \\ \sin.\ \theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}. \end{cases}$$

sind.

Diese Aufgabe kann immer aufgelöst werden, da eine jede der beiden Größen $\dfrac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$, $\dfrac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$ kleiner als die Einheit die Summe ihrer Quadrate aber gleich 1 ist. Sie läßt sogar eine unendliche Anzahl verschiedener Auflösungen zu, da man, sobald man einen passenden Werth von θ gefunden hat, diesen um eine beliebige Anzahl von Peripherien vermehren oder vermindern kann, ohne das Sinus und Cosinus ihren Werth ändern.

Wenn der imaginäre Ausdruck $\alpha + \beta i$ auf die Form

$$\varrho\ (\cos.\ \theta + i \sin.\ \theta)$$

gebracht worden ist, so ist ϱ der sogenannte Modulus dieses imaginären Ausdrucks; der Factor

$$\cos.\ \theta + i \sin.\ \theta$$

dagegen heißt der reducirte Ausdruck. Da man aus den als bekannt angenommenen Größen α und β für den Modulus ϱ nur einen Werth aus (3) herleiten kann, so folgt: daß der Modulus für zwei gleiche imaginäre Ausdrücke derselbe ist. Man kann demnach folgenden Satz aufstellen:

Lehrsatz 1. Wenn zwei imaginäre Ausdrücke einander gleich sind, so müssen es auch ihre Moduli, mithin auch die reducirten Ausdrücke sein.

Vergleicht man zwei gepaarte imaginäre Ausdrücke mit einander, so findet man, daß ihre Moduli gleich sind. Das Quadrat des gemeinschaftlichen Modulus beider Ausdrücke wird ihrem Producte gleich sein.

Wenn in dem imaginären Ausdruck $\alpha + \beta i$, β ver-

schwindet, so reducirt sich der Ausdruck auf eine reelle Größe α. In diesem Falle erhält man aus den Gleichungen (3) und (4), wenn α positiv ist,

$$\varrho = \sqrt{\alpha^2}$$

$$\cos.\ \theta = 1,\ \sin.\ \theta = 0;$$

mithin

$$\theta = \pm 2k\pi,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet; 2) wenn α negativ ist,

$$\varrho = \sqrt{\alpha^2},$$

$$\cos.\ \theta = -1,\ \sin.\ \theta = 0;$$

mithin

$$\theta = \pm (2k+1)\ \pi.$$

Demnach ist der Modulus einer reellen Größe α nichts anders als der Zahlenwerth von $\sqrt{\alpha^2}$, und der reducirte Ausdruck, welcher einer solchen Größe entspricht, ist beständig $+1$ oder -1; nämlich

$$+1 = \cos.\ (\pm 2k\pi) + i \sin.\ (\pm 2k\pi),$$

wenn die Größe positiv ist, und

$$-1 = \cos.\ (\pm (2k+1)\pi) + i \sin.\ (\pm (2k+1)\pi),$$

wenn die Größe negativ ist.

Jeder imaginäre Ausdruck, dessen Modulus Null ist, reducirt sich selbst auf Null, indem seine beiden Glieder verschwinden. Umgekehrt, da Cosinus und Sinus eines Bogens nicht zu gleicher Zeit sich auf Null reduciren können, so folgt: daß ein imaginärer Ausdruck sich nicht auf Null reduciren kann, wenn nicht sein Modulus verschwindet.

Jeder imaginäre Ausdruck, dessen Modulus 1 ist, ist nothwendigerweise ein reducirter Ausdruck. So z. B. sind

$$\cos.\ a + i \sin.\ a,\ \cos.\ a - i \sin.\ a,$$

$$-\cos.\ a - i \sin.\ a,\ -\cos.\ a + i \sin.\ a,$$

zwei Paar reducirte gepaarte Ausdrücke. Man erhält in der That diese vier Ausdrücke durch die Formel

$$\cos.\ \theta + i \sin.\ \theta,$$

wenn man

$$\theta = \pm 2k\pi + a,\ \theta = \pm 2k\pi - a,$$
$$\theta = \pm (2k+1)\pi + a,\ \theta = \pm (2k+1)\pi - a$$

setzt, wo k eine beliebige ganze Zahl ist.

Da die Rechnungen mit imaginären Ausdrücken durch die Betrachtung der reducirten Ausdrücke sehr vereinfacht werden können, so wird es der Mühe werth sein, die vorzüglichsten Eigenschaften der letztern kennen zu lernen. Diese Eigenschaften sind in folgenden Lehrsätzen enthalten.

Lehrsatz 2. Um zwei reducirte Ausdrücke

$$\cos.\theta + i \sin.\theta,\ \cos.\theta' + i \sin.\theta'$$

mit einander zu multipliciren, darf man nur die ihnen entsprechenden Bogen θ und θ' addiren (und die Summe derselben statt der einzelnen Bogen in die Formel $\cos.\theta + i \sin.\theta$ einführen.

Beweis. Man hat in der That

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} (\cos.\theta + i \sin.\theta)(\cos.\theta' + i \sin.\theta') \\ = (\cos.(\theta + \theta') + i \sin.(\theta + \theta'). \end{array} \right.$$

Zusatz. Setzt man in der vorhergehenden Formel $\theta' = -\theta$, so findet man, wie man auch wohl erwarten konnte,

$$(6)\quad (\cos.\theta + i \sin.\theta)(\cos.\theta - i \sin.\theta) = 1.$$

Lehrsatz 3. Um mehrere imaginäre Ausdrücke, z. B.

$$\cos.\theta + i \sin.\theta,\ \cos.\theta' + i \sin.\theta',$$
$$\cos.\theta'' + i \sin.\theta'',\ \text{etc.}.....$$

mit einander zu multipliciren, darf man nur die Summe der Bogen $\theta, \theta', \theta'', ...$, für θ in $\cos.\theta + i \sin.\theta$ substituiren.

Beweis. Man hat in der That

$$(\cos.\theta + i \sin.\theta)(\cos.\theta' + i \sin.\theta')$$
$$= \cos.(\theta + \theta') + i \sin.(\theta + \theta'),$$
$$(\cos.\theta + i \sin.\theta)(\cos.\theta' + i \sin.\theta')(\cos.\theta'' + i \sin.\theta'')$$
$$= [\cos.(\theta + \theta') + i \sin.(\theta + \theta')][\cos.\theta'' + i \sin.\theta'']$$
$$= \cos.(\theta + \theta' + \theta'') + i \sin.(\theta + \theta' + \theta''),$$
$$\text{etc.}.....,$$

und wenn man so fortfährt, so findet man allgemein, wie groß auch immer die Anzahl der Bogen θ, θ', θ'', ... sein mag

$$(7)\begin{cases}(\cos.\theta+\mathrm{i}\sin.\theta)(\cos.\theta'+\mathrm{i}\sin.\theta')(\cos.\theta''+\mathrm{i}\sin\theta'')\ldots\\ =\cos.(\theta+\theta'+\theta''\ldots.)+\mathrm{i}\sin.(\theta+\theta'+\theta''\ldots.)\end{cases}$$

Zusatz. Entwickelt man den ersten Theil dieser Gleichung unmittelbar durch die Multiplication, so besteht die Entwickelung aus zwei Theilen, von welchen der eine reell ist, der andere dagegen den Factor i hat. Der reelle Theil ist der Werth von $\cos.(\theta+\theta'+\theta''\ldots)$; der Coefficient von i dagegen der Werth von $\sin.(\theta+\theta'+\theta''\ldots)$. — Betrachtet man z. B. nur 3 Bogen θ, θ', θ'', so verwandelt sich die Gleichung (7) in

$$(\cos.\theta+\mathrm{i}\sin.\theta)(\cos.\theta'+\mathrm{i}\sin.\theta')(\cos.\theta''+\mathrm{i}\sin.\theta'')$$
$$=\cos.(\theta+\theta'+\theta'')+\mathrm{i}\sin.(\theta+\theta'+\theta'').$$

Entwickelt man nun den ersten Theil dieser Gleichung durch die algebraische Multiplication, so findet man

$$\cos.(\theta+\theta'+\theta'')=\cos.\theta\cos.\theta'\cos.\theta''-\cos.\theta\sin.\theta'\sin.\theta''$$
$$-\sin.\theta\cos.\theta'\sin.\theta''-\sin.\theta\sin.\theta'\cos.\theta'',$$

$$\sin.(\theta+\theta'+\theta'')=\sin.\theta\cos.\theta'\cos.\theta''+\cos.\theta\sin.\theta'\cos.\theta''$$
$$+\cos.\theta\cos.\theta'\sin.\theta''-\sin.\theta\sin.\theta'\sin.\theta''.$$

Lehrsatz 4. Um den reducirten Ausdruck

$$\cos.\theta+\mathrm{i}\sin.\theta$$

durch den folgenden

$$\cos.\theta'+\mathrm{i}\sin.\theta'$$

zu dividiren, darf man nur den Bogen θ', welcher dem zweiten Ausdrucke entspricht, von dem Bogen θ, welcher dem ersten entspricht, subtrahiren und diese Differenz in die Formel $\cos.\theta+\mathrm{i}\sin.\theta$ statt der einzelnen Bogen einführen.

Beweis. Es sei x der gesuchte Quotient, also

$$x=\frac{\cos.\theta+\mathrm{i}\sin.\theta}{\cos.\theta'+\mathrm{i}\sin.\theta'},$$

so muß dieser Quotient ein imaginärer Ausdruck sein, welcher, mit $\cos.\theta'+\mathrm{i}\sin.\theta'$ multiplicirt, $\cos.\theta+\mathrm{i}\sin.\theta$ gibt; mit andern Worten, x muß der Gleichung

$$(\cos.\theta' + i\sin.\theta')\,x = \cos.\theta + i\sin.\theta$$

Genüge leisten. Um aus dieser Gleichung den Werth von x zu erhalten, darf man nur beide Theile derselben mit

$$\cos.\theta' - i\sin.\theta'$$

multipliciren, so wird sich der Coefficient von x auf 1 reduciren (s. Lehrs. 2., Zus. 1.), und man wird erhalten;

$$\begin{aligned} x &= (\cos.\theta + i\sin.\theta)\,(\cos.\theta' - i\sin.\theta') \\ &= (\cos.\theta + i\sin.\theta)\,[\cos.(-\theta) + i\sin.(-\theta)] \\ &= \cos.(\theta-\theta') + i\sin.(\theta-\theta'). \end{aligned}$$

Es ist demnach

$$(8)\quad \frac{\cos.\theta + i\sin.\theta}{\cos.\theta' + i\sin.\theta'} = \cos.(\theta-\theta') + i\sin.(\theta-\theta')$$

Zusatz. Setzt man in (8), $\theta = 0$, so erhält man

$$(9)\quad \frac{1}{\cos.\theta' + i\sin.\theta'} = \cos\theta' - i\sin.\theta'.$$

Lehrsatz 5. Um einen imaginären Ausdruck

$$\cos.\theta + i\sin.\theta$$

auf die m^{te} Potenz zu erheben (wo m eine beliebige ganze Zahl ist), darf man nur den Bogen θ mit m multipliciren und das Product statt des einfachen Bogens in die Formel $\cos.\theta + i\sin.\theta$ einführen.

Beweis. Da die Bogen θ, θ', θ''.... in der Formel (7) ganz beliebig sind, so erhält man, wenn ihrer m, und alle unter einander gleich sind,

$$(10)\quad (\cos.\theta + i\sin.\theta)^m = \cos.m\theta + i\sin.m\theta.$$

Zusatz. Setzt man in (10), $\theta = z$, $\theta = -z$, so erhält man folgende Gleichungen

$$(11)\quad \begin{cases} (\cos.z + i\sin.z)^m = \cos.mz + i\sin.mz, \\ (\cos.z - i\sin.z)^m = \cos.mz - i\sin.mz. \end{cases}$$

Da der erste Theil einer jeden dieser beiden Gleichungen ein Product von m gleichen Factoren ist, so kann er unmittelbar durch die Multiplication dieser Factoren, oder, was dasselbe ist, durch die Newton'sche Formel entwickelt werden.

Verrichtet man diese Operation, und setzt man in beiden Gleichungen 1) die reellen Glieder, 2) die Coefficienten von i, in beiden Theilen einander gleich, so ergibt sich:

$$(12)\begin{cases} \cos. mz = \cos. z^m - \dfrac{m(m-1)}{1.2}\cos. z^{m-2}.\sin. z^2 \\ + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos. z^{m-4}.\sin. z^4 - \text{etc...} \\ \sin. mz = \dfrac{m}{1}.\cos. z^{m-1}.\sin. z \\ - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos. z^{m-3}.\sin. z^3 + \text{etc.....} \end{cases}$$

So erhält man z. B., wenn $m = 2$ ist,

$$\cos. 2z = \cos. z^2 - \sin. z^2$$
$$\sin. 2z = 2\sin. z . \cos. z;$$

wenn $m = 3$ ist,

$$\cos. 3z = \cos. z^3 - 3\cos. z \sin. z^2,$$
$$\sin. 3z = 3\cos. z^2 \sin. z - \sin. z^3,$$
$$\text{etc.....}$$

Lehrsatz 6. Um den imaginären Ausdruck

$$\cos. \theta + i \sin. \theta$$

auf die $(-m)^{te}$ Potenz zu erheben (wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet), darf man nur den Bogen in diesem Ausdrucke mit — n multipliciren.

Beweis. Nach der von uns im §. 1. gegebenen Definition der negativen Potenzen ist nämlich

$$(\cos. \theta + i \sin. \theta)^{-m} = \frac{1}{(\cos. \theta + i \sin. \theta)^m}$$
$$= \frac{1}{\cos. m\theta + i \sin. m\theta};$$

mithin nach (9),

$$(13)\quad (\cos. \theta + i \sin. \theta)^{-m} = \cos. m\theta - i \sin. m\theta.$$

oder, was dasselbe ist,

$$(14)\quad (\cos. \theta + i \sin. \theta)^{-m} = \cos.(-m\theta) + i \sin.(-m\theta).$$

Nachdem wir nun die vorzüglichsten Eigenschaften der reducirten Ausdrücke entwickelt haben, wird es leicht sein, zwei

oder mehrere imaginäre Ausdrücke durch einander zu multipliciren oder zu dividiren (welche Werthe ihre Moduli immer haben mögen); oder einen imaginären Ausdruck auf die Potenz m oder — m zu erheben (vorausgesetzt, daß m eine ganze Zahl ist). Man kann diese Operationen mit Hülfe der folgenden Lehrsätze sehr leicht verrichten.

Lehrsatz 7. *Um das Product zweier oder mehrerer imaginären Ausdrücke zu erhalten, darf man nur das Product der reducirten Ausdrücke mit dem Producte der ihnen entsprechenden Moduli multipliciren.*

Beweis. Der aufgestellte Lehrsatz ergibt sich offenbar aus dem Principe, daß es bei dem Producte mehrerer reellen oder imaginären Factoren auf die Ordnung der letztern durchaus nicht ankommt. Wenn man demnach mehrere imaginäre Ausdrücke

$$\varrho\,(\cos.\theta + i\sin.\theta),\ \varrho'(\cos.\theta' + i\sin.\theta'),$$
$$\varrho''(\cos.\theta'' + i\sin.\theta''),\ \text{etc.}\ldots\ldots,$$

deren Moduli respective ϱ, ϱ', ϱ''.... sind, mit einander multipliciren will, so darf man nach diesem Principe nur das Product aller Moduli bilden, sodann das Product aller reducirten Ausdrücke, und beide Producte mit einander multipliciren. Auf diese Weise findet man das gesuchte Resultat

$$(15)\quad \varrho\,\varrho'\,\varrho''\ldots[\cos.(\theta+\theta'+\theta''\ldots.) + i\sin.(\theta+\theta'+\theta''\ldots.)].$$

Zusatz 1. Das Product mehrerer imaginären Ausdrücke ist gleichfalls ein imaginärer Ausdruck, dessen Modulus dem Producte der Moduli sämmtlicher Factoren gleich ist.

Zusatz 2. Da ein imaginärer Ausdruck nur dann verschwindet, wenn sein Modulus Null wird, und da, wenn das Product mehrerer Moduli verschwinden soll, nothwendigerweise einer von ihnen sich auf Null reduciren muß, so ist es einleuchtend, daß man aus Lehrsatz 7 folgenden Schluß ziehen kann:

Das Product zweier oder mehrerer imaginären Ausdrücke kann nur dann verschwinden, wenn einer von ihnen Null wird.

Lehrsatz 8. *Um den Quotienten zweier imaginären Ausdrücke zu erhalten, darf man nur den*

Quotienten der reducirten Ausdrücke, welche ihnen entsprechen, durch den Quotienten der Moduli dividiren.

Beweis. Gesetzt, man solle

$$\varrho\,(\cos.\,\theta + i\,\sin.\,\theta)$$

durch

$$\varrho'\,(\cos.\,\theta' + i\,\sin.\,\theta')$$

dividiren; so wird, wenn x der gesuchte Quotient ist, dieses x gleichfalls ein imaginärer Ausdruck sein müssen, welcher der Gleichung

$$\varrho'\,(\cos.\,\theta' + i\,\sin.\,\theta')\,x = \varrho\,(\cos.\,\theta + i\,\sin.\,\theta)$$

Genüge leisten muß.

Um aus dieser Gleichung den Werth von x zu erhalten, multiplicire man beide Theile mit

$$\frac{1}{\varrho'}\,(\cos.\,\theta' - i\,\sin.\,\theta),$$

so findet man

$$x = \frac{\varrho}{\varrho'}\,[\cos.\,(\theta-\theta') + i\,\sin.\,(\theta-\theta')].$$

Mithin ist

$$(16)\quad \frac{\varrho\,(\cos.\,\theta + i\,\sin.\,\theta)}{\varrho'\,(\cos.\,\theta' + i\,\sin.\,\theta')} = \frac{\varrho}{\varrho'}[\cos.\,(\theta-\theta') + i\,\sin.\,(\theta-\theta')].$$

Da nun nach Lehrsatz 4.

$$\cos.\,(\theta-\theta') + i\,\sin.\,(\theta-\theta')$$

genau der Quotient der beiden reducirten Ausdrücke

$$\cos.\,\theta + i\,\sin.\,\theta,\ \cos.\,\theta' + i\,\sin.\,\theta'$$

ist, so ist es klar, daß die Formel (16) den 8ten Lehrsatz enthält.

Zusatz. Setzt man in (16), $\theta = 0$, und $\varrho = 1$, so findet man

$$(17)\quad \frac{1}{\varrho'\,(\cos.\,\theta' + i\,\sin.\,\theta')} = \frac{1}{\varrho'}\,(\cos.\,\theta' - i\,\sin.\,\theta').$$

Lehrsatz 9. Um die m^{te} Potenz eines imaginären Ausdrucks zu erhalten (wo m eine beliebige ganze Zahl ist), darf man nur die m^{te} Potenz des correspondirenden reducirten Ausdrucks mit der m^{ten} Potenz des Modulus multipliciren.

Beweis. Setzt man im 7ten Lehrsatze die imaginären Ausdrücke alle einander gleich, also

$$\varrho\,(\cos.\,\theta + i\,\sin.\,\theta) = \varrho'\,(\cos.\,\theta' + i\,\sin.\,\theta')$$
$$= \varrho''\,(\cos.\,\theta'' + i\,\sin.\,\theta'') = \text{etc.}\ldots,$$

und sind deren m, so ist ihr Product der m^{ten} Potenz des ersten von ihnen gleich, d. h.

$$\varrho^m\,(\cos.\,\theta + i\,\sin.\,\theta)^m,$$

und da in diesem Falle (15) sich in

$$\varrho^m\,(\cos.\,m\theta + i\,\sin.\,m\theta)$$

verwandelt, so hat man offenbar

$$(18)\quad [\varrho\,(\cos.\theta + i\,\sin.\theta)]^m = \varrho^m\,[\cos.\,m\theta + i\sin.\,m\theta].$$

Da aber der reducirte Ausdruck

$$\cos.\,m\theta + i\,\sin.\,m\theta$$

nach Lehrsatz 5., dem Ausdrucke

$$(\cos.\,\theta + i\,\sin.\,\theta)^m$$

gleich ist, so ist der Lehrsatz 9. durch die Formel (18) gegeben.

Lehrsatz 10. Um einen imaginären Ausdruck auf die $(-m)^{te}$ Potenz zu erheben (wo m eine ganze Zahl bedeutet), darf man nur die ebensovielste Potenz des Modulus und des reducirten Ausdrucks berechnen und beide Potenzen mit einander multipliciren.

Beweis. Gesetzt, es sei der imaginäre Ausdruck

$$\varrho\,(\cos.\,\theta + i\,\sin.\,\theta)$$

auf die $(-m)^{te}$ Potenz zu erheben, so ist

$$[\varrho\,(\cos.\,\theta + i\,\sin.\,\theta)]^{-m} = \frac{1}{[\varrho\,(\cos.\,\theta + i\,\sin.\,\theta)]^m};$$

mithin, nach (17),

$$[\varrho\,(\cos.\,\theta + i\,\sin.\,\theta)]^{-m} = \frac{1}{\varrho^m}[\cos.\,m\theta - i\sin.\,m\theta],$$

oder, was dasselbe ist,

$$(19)\quad [\varrho\,(\cos.\theta + i\sin.\theta)]^{-m} = \varrho^{-m}\,[\cos.m\theta - i\,\sin.\,m\theta].$$

Aus dieser Formel (verbunden mit (13)) ergibt sich der 10te Lehrsatz vollständig.

§. 3. Von den reellen und imaginären Wurzeln der beiden Größen $+1$, -1, und von deren gebrochenen Potenzen.

Es seien m und n Primzahlen unter sich. Macht man nun von den im ersten Paragraphen eingeführten Zeichen Gebrauch, so werden die n^{ten} Wurzeln der Einheit, oder, was dasselbe ist, ihre $\frac{1}{n}^{ten}$ Potenzen die verschiedenen Werthe von

$$\sqrt[n]{1} = ((1))^{\frac{1}{n}}$$

sein; desgleichen werden die positiven oder negativen gebrochenen Potenzen von 1, vom Grade $\frac{m}{n}$ oder $-\frac{m}{n}$ die verschiedenen Werthe von

$$((1))^{\frac{m}{n}} \text{ oder von } ((1))^{-\frac{m}{n}}$$

sein. Hieraus ergibt sich: daß man, um diese Wurzeln oder Potenzen zu bestimmen, nach einander folgende drei Aufgaben zu lösen haben wird.

Aufgabe 1. Die verschiedenen reellen oder imaginären Werthe des Ausdrucks $((1))^{\frac{1}{n}}$ zu finden.

Auflösung. Es sei x einer von diesen Werthen, und wir wollen, um diesen Werth unter eine Form zu bringen, welche sowohl den reellen Größen, als auch den imaginären Ausdrücken entspricht,

$$x = r(\cos. t + i \sin. t)$$

setzen, wo r eine positive Größe, t aber einen reellen Bogen bezeichnet, so ist nach der Definition des Ausdrucks $((1))^{\frac{1}{n}}$

$$(1)\ x^n = 1$$

oder, was dasselbe ist,

$$r^n [\cos. nt + i \sin. nt] = 1;$$

woraus, nach §. 2., Lehrs. 1., folgt:

$$r^n = 1$$

$$\cos. nt + i \sin. nt = 1;$$

mithin

$$r = 1,\ \cos. nt = 1,\ \sin. nt = 0,\ nt = \pm 2k\pi,$$

$$t = \pm \frac{2k\pi}{n},$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Nachdem nun die Werthe von r und t auf diese Weise bestimmt sind, so werden die verschiedenen Werthe von x, welche der Gleichung (1) Genüge leisten, offenbar in der Formel

$$(2) \qquad x = \cos. \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin. \frac{2k\pi}{n}$$

enthalten sein; mit andern Worten, die verschiedenen Werthe von $((1))^n$ werden durch die Gleichung

$$(3) \qquad ((1))^{\frac{1}{n}} = \cos. \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin. \frac{2k\pi}{n}$$

gegeben sein. — Es sei nun h diejenige ganze Zahl, welche dem Quotienten $\frac{k}{n}$ am nächsten kommt; so wird die Differenz zwischen h und $\frac{k}{n}$ höchstens $\frac{1}{2}$ sein können, und es wird

$$\frac{k}{n} = h \pm \frac{k'}{n}$$

sein, wo $\frac{k'}{n}$ jeder Bruch sein kann, welcher kleiner, oder höchstens eben so groß, als $\frac{1}{2}$ ist. Mithin ist die ganze Zahl k' kleiner, oder höchstens eben so groß, als $\frac{n}{2}$; woraus denn folgt:

$$\frac{2k\pi}{n} = 2h\pi \pm \frac{2k'\pi}{n},$$

$$\cos. \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin. \frac{2k\pi}{n} = \cos. \frac{2k'\pi}{n} \pm i \sin. \frac{2k'\pi}{n}.$$

Folglich gibt die Formel

$$\left[\cos. \frac{2k'\pi}{n} \pm i \sin. \frac{2k\pi}{n}\right] \ldots\ldots \begin{Bmatrix} k' = 0 \\ k' = \frac{n}{2} \end{Bmatrix},$$

oder $$\left[\cos. \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin. \frac{2k\pi}{n}\right] \ldots\ldots \begin{Bmatrix} k = 0 \\ k = \frac{n}{2} \end{Bmatrix},$$

wo aber k eine ganze Zahl sein muß, alle Werthe von $((1))^{\frac{1}{n}}$.

Zusatz 1. Ist n gerade, so sind die verschiedenen zwischen 0 und $\frac{n}{2}$ liegenden Werthe von k respective

$$0, 1, 2, \ldots \frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}.$$

Für jeden dieser Werthe von k liefert die Formel (3) im Allgemeinen zwei gepaarte imaginäre Werthe des Ausdrucks $((1))^{\frac{1}{n}}$, d. h. 2 gepaarte imaginäre n^{te} Wurzeln aus 1. Nur für $k = 0$ findet man eine einzige reelle Wurzel, $+1$, und für $k = \frac{n}{2}$ eine zweite reelle Wurzel, -1. Wenn also n gerade ist, so läßt der Ausdruck $((1))^{\frac{1}{n}}$ zwei reelle Werthe zu, nämlich

$$+1, \quad -1$$

neben $n-2$ imaginären Werthen, welche man paarweise erhält, nämlich

$$(4)\begin{cases} \cos.\frac{2\pi}{n} + i\sin.\frac{2\pi}{n}, \cos.\frac{2\pi}{n} - i\sin.\frac{2\pi}{n}, \\ \cos.\frac{4\pi}{n} + i\sin.\frac{4\pi}{n}, \cos.\frac{4\pi}{n} - i\sin.\frac{4\pi}{n}, \\ \text{etc.} \ldots\ldots, \\ \frac{\cos.(n-2)\pi}{n} + i\sin.\frac{(n-2)\pi}{n}, \cos.\frac{(n-2)\pi}{n} - i\sin.\frac{2\pi}{n}. \end{cases}$$

Die Anzahl aller dieser reellen und imaginären Werthe ist n.

Es sei z. B. $n = 2$, so findet man zwei Werthe von

$$((1))^{\frac{1}{2}},$$

oder, was dasselbe ist, zwei Werthe von x, welche der Gleichung

$$x^2 = 1$$

Genüge leisten. Beide sind reell und respective

$$+1, \quad -1.$$

Gesetzt, es sei $n = 4$, so findet man 4 Werthe des Ausdrucks

$$((1))^{\frac{1}{4}},$$

oder, was dasselbe ist, vier Werthe von x, welche der Gleichung

$$x^4 = 1$$

Genüge leisten. Unter diesen sind zwei reell, nämlich $+1$, -1; die beiden andern Werthe sind imaginär und respective

$$\cos.\frac{\pi}{2} + i \sin.\frac{\pi}{2} = +i,$$

und

$$\cos.\frac{\pi}{2} - i \sin.\frac{\pi}{2} = -i.$$

Zusatz 2. Ist n ungerade, so sind die verschiedenen Werthe von k, welche nicht über die Grenzen 0 und k hinaus liegen, respective

$$0, 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}.$$

Für jeden dieser Werthe von k liefert die Formel (3) im Allgemeinen zwei gepaarte imaginäre Werthe von $((1))^{\frac{1}{n}}$, d. h. zwei imaginäre gepaarte n^{te} Wurzeln aus 1. Nur für $k = 0$ findet man eine einzige reelle Wurzel, nämlich $+1$. Wenn also n ungerade ist, so läßt der Ausdruck $((1))^{\frac{1}{n}}$ neben einem einzigen reellen Werthe, $+1$, $n-1$ imaginäre Werthe zu, welche man paarweise erhält, nämlich

$$(5)\begin{cases} \cos.\frac{2\pi}{n} + i \sin.\frac{2\pi}{n}, \cos.\frac{2\pi}{n} - i \sin.\frac{2\pi}{n}, \\ \cos.\frac{4\pi}{n} + i \sin.\frac{4\pi}{n}, \cos.\frac{4\pi}{n} - i \sin.\frac{4\pi}{n}, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \\ \cos.\frac{(n-1)\pi}{n} + i \sin.\frac{(n-1)\pi}{n}, \cos.\frac{(n-1)\pi}{n} - i \sin.\frac{(n-1)\pi}{n}. \end{cases}$$

Die Anzahl dieser reellen oder imaginären Werthe ist n.

Es sei z. B. $n = 3$, so findet man, daß es drei Werthe gibt, für den Ausdruck

$$((1))^{\frac{1}{3}},$$

oder, was daſſelbe iſt, daß drei Werthe von x der Gleichung

$$x^3 = 1$$

Genüge leiſten, und daß dieſe drei Werthe, von welchen einer reell iſt, folgende ſind

$$+1,\ \cos.\frac{2\pi}{3} + i\sin.\frac{2\pi}{3},\ \cos.\frac{2\pi}{3} - i\sin.\frac{2\pi}{3}.$$

Da nun die Seite des eingeſchriebenen Sechsecks, wie bekannt, dem Radius gleich iſt, und da das Supplement des Bogens, deſſen Sehne dieſe Seite iſt, $\frac{2\pi}{3}$ beträgt, ſo erhält man leicht folgende Gleichungen

$$\cos.\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},\ \sin.\frac{2\pi}{3} = +\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2};$$

mithin reduciren ſich die imaginären Werthe von $((1))^{\frac{1}{3}}$ auf

$$-\tfrac{1}{2} + \frac{3^{\frac{1}{2}}\,i}{2},\ -\tfrac{1}{2} - \frac{3^{\frac{1}{2}}\,i}{2}.$$

Zuſatz 3. Wenn n eine ganze Zahl iſt, ſo hat $((1))^{\frac{1}{n}}$, oder, was daſſelbe iſt, x in der Gleichung $x^n = 1$, immer n theils reelle, theils imaginäre Werthe, d. h. n Werthe, welche dieſer Gleichung Genüge leiſten.

Aufgabe 2. Die verſchiedenen reellen oder imaginären Werthe des Ausdrucks $((1))^{\frac{m}{n}}$ zu finden.

Auflöſung. Nehmen wir an, daß m und n Primzahlen unter ſich ſind, ſo haben wir (was ſich ſchon aus der Definition des Ausdrucks $((1))^{\frac{m}{n}}$ ergibt),

$$((1))^{\frac{m}{n}} = \left[((1))^{\frac{1}{n}}\right]^m.$$

Setzt man nun für $((1))^{\frac{1}{n}}$ ſeinen allgemeinen Werth aus (3), ſo findet man

$$((1))^{\frac{m}{n}} = \left[\cos.\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin.\frac{2k\pi}{n}\right]^m,$$

und hierauf

$$(6) \quad ((1))^{\frac{m}{n}} = \cos.\frac{m.2k\pi}{n} \pm i \sin.\frac{m.2k\pi}{n}.$$

Um aus dieser Formel alle Werthe von $((1))^{\frac{m}{n}}$ abzuleiten, darf man nur successive für k alle ganzen Zahlen zwischen 0 und $\frac{n}{2}$ substituiren. Es seien k′, k″ zwei von diesen Werthen und ungleich, so behaupte ich, daß

$$\cos.\frac{m.2k'\pi}{n} \text{ und } \cos.\frac{m.2k''\pi}{n}$$

von einander verschieden sein müssen. Denn diese Cosinusse könnten nur dann gleich groß sein, wenn zwischen den ihnen entsprechenden Bogen eine Gleichung von der Form

$$\frac{m.2k'\pi}{n} = \pm 2h\pi \pm \frac{m.2k''\pi}{n}$$

(wo h eine ganze Zahl bedeutet) stattfände. Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$h = \frac{m(\pm k' \pm k'')}{n}.$$

Es müßte demnach, da m und n Primzahlen unter sich sind, $(\pm k' \pm k'')$ durch n theilbar sein, was aber unmöglich ist, da die Zahlen k′ und k″, von welchen keine größer als $\frac{1}{2}$ n sein kann, einander nicht gleich sind; ihre Summe oder Differenz also kleiner als n sein muß. Mithin geben zwei verschiedene Werthe von k, welche zwischen den Grenzen 0 und $\frac{n}{2}$ liegen, auch zwei verschiedene Werthe von

$$\cos.\frac{m.2k\pi}{n},$$

Hieraus ergibt sich denn, daß der durch die Gleichung (6) gegebenen reellen oder imaginären Werthe von $((1))^{\frac{m}{n}}$ eben so viele sind, als der reellen oder imaginären Werthe von $((1))^{\frac{1}{n}}$, welche durch die Gleichung (3) bestimmt werden. Nun ist aber auch offenbar

$$\left[\cos.\frac{m\,.\,2k\pi}{n} \pm i\,\sin.\frac{m\,.\,2k\pi}{n}\right]^n$$
$$= \cos.\,m\,2k\pi \pm i\sin.\,m\,.\,2k\pi = 1;$$

mithin ist jeder Werth von $((1))^{\frac{m}{n}}$ ein reeller oder imaginärer Ausdruck, dessen n^{te} Potenz gleich 1 ist, also ein Werth von $((1))^{\frac{1}{n}}$. Diese Bemerkung leitet uns auf die Formel

$$(7) \qquad ((1))^{\frac{m}{n}} = ((1))^{\frac{1}{n}},$$

in welcher das Zeichen $=$ nur andeutet, daß einer von den Werthen des ersten Theiles immer einem von den Werthen des zweiten Theiles gleich ist.

Aufgabe 3. Die verschiedenen reellen oder imaginären Werthe des Ausdrucks $((1))^{-\frac{m}{n}}$ zu finden.

Auflösung. Nach der Definition der negativen Potenzen ist

$$((1))^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{((1))^{\frac{m}{n}}}.$$

Setzt man für $((1))^{\frac{m}{n}}$ seinen, durch die Gleichung (6) gegebenen Werth, so ist nach (9) im vorigen Paragraph

$$(8) \qquad ((1))^{-\frac{m}{n}} = \cos.\frac{m\,.\,2k\pi}{n} \mp i\,.\,\sin.\frac{m\,.\,2k\pi}{n};$$

woraus denn folgt, daß die verschiedenen Werthe von $((1))^{-\frac{m}{n}}$ mit denen von $((1))^{\frac{m}{n}}$, folglich auch mit denen von $((1))^{\frac{1}{n}}$ übereinstimmen. Man hat demnach

$$(9) \qquad ((1))^{-\frac{m}{n}} = ((1))^{\frac{1}{n}},$$

wo das Zeichen $=$ eben so, wie bei der Gleichung (7) zu deuten ist.

Zusatz. Setzt man $m = 1$, so erhält man aus (9)

$$(10) \qquad ((1))^{-\frac{1}{n}} = ((1))^{\frac{1}{n}}.$$

Wir wollen nun auch die Wurzeln und gebrochenen Potenzen von -1 suchen. Die n^{ten} Wurzeln aus dieser Größe, oder, was dasselbe ist, ihre $\frac{1}{n}^{ten}$ Potenzen, werden die verschiedenen Werthe von

$$\sqrt[n]{-1} = ((-1))^{\frac{1}{n}}$$

sein; die $\frac{m}{n}^{ten}$ oder $\left(-\frac{m}{n}\right)^{ten}$ Potenzen von -1 dagegen die verschiedenen Werthe von

$$((-1))^{\frac{m}{n}}, \quad ((-1))^{-\frac{m}{n}}.$$

Um diese Wurzeln und Potenzen zu bestimmen, hat man folgende drei Aufgaben zu lösen.

Aufgabe 4. Die verschiedenen reellen oder imaginären Werthe von $((-1))^{\frac{1}{n}}$ zu finden.

Auflösung. Es sei

$$x = r(\cos. t + i \sin. t)$$

einer dieser Werthe (wo r eine positive Größe und t einen reellen Bogen bezeichnet), so folgt schon aus der Definition von $((-1))^{\frac{1}{n}}$

$$x^n = -1, \tag{11}$$

oder

$$r^n [\cos. nt + i \sin. nt] = -1.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nach §. 2., Lehrs. 1.

$$r^n = 1$$

$$\cos. nt + i \sin. nt = -1,$$

folglich

$$r = 1$$

$$\cos. nt = -1, \quad \sin. nt = 0, \quad nt = \pm(2k+1)\pi,$$

$$t = \pm\frac{(2k+1)\pi}{n},$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Da nun die Größen r und t auf diese Weise bestimmt sind, so werden die verschiedenen Werthe von x, welche der Gleichung (11) Genüge leisten, offenbar durch die Formel

$$(12) \quad x = \cos.\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm i \sin.\frac{(2k+1)\pi}{n},$$

oder, was daſſelbe iſt, durch die Gleichung

$$(13) \quad ((-1))^{\frac{1}{n}} = \cos.\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm i \sin.\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

gegeben ſein, da

$$x = ((-1))^{\frac{1}{n}} \text{ iſt.}$$

Es ſei nun h diejenige ganze Zahl, welche dem Quotienten $\frac{2k+1}{2n}$ am nächſten liegt; ſo wird die Differenz zwiſchen den beiden Zahlen h, $\frac{2k+1}{2n}$ offenbar ein Bruch mit ungeradem Zähler und kleiner oder höchſtens eben ſo groß als $\frac{1}{2}$ ſein, ſo daß man haben wird

$$\frac{2k+1}{2n} = h \pm \frac{(2k'+1)}{2n},$$

wo $2k'+1$ eine ungerade Zahl bedeutet, welche gleich n oder kleiner als n iſt. Hieraus ergibt ſich

$$\frac{(2k+1)\pi}{n} = 2h\pi \pm \frac{(2k'+1)\pi}{n},$$

$$\cos.\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm i \sin.\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

$$= \cos.\frac{(2k'+1)\pi}{n} \pm i \sin.\frac{(2k'+1)\pi}{n}.$$

Mithin ſind alle Werthe von $((-1))^{\frac{1}{n}}$ durch die Formel

$$\cos.\frac{(2k'+1)\pi}{n} \pm i \sin.\frac{(2k'+1)\pi}{n},$$

oder durch die Formel (13) gegeben; jedoch muß $2k'+1$ oder $2k+1$ beſtändig zwiſchen 0 und n liegen.

Zuſatz 1. Iſt n gerade, ſo ſind die Werthe, welche $2k+1$ haben kann, reſpective

$$1, 3, 5, \ldots., (n-1).$$

Für jeden dieſer Werthe erhält man aus (13) zwei gepaarte

imaginäre Werthe von $((-1))^{\frac{1}{n}}$; folglich läßt im vorliegenden Falle dieser Ausdruck keinen reellen Werth, sondern nur n imaginäre Werthe zu, welche man paarweise erhält, nämlich

$$(14)\begin{cases} \cos.\frac{\pi}{n}+i\sin.\frac{\pi}{n},\ \cos.\frac{\pi}{n}-i\sin.\frac{\pi}{n}, \\ \cos.\frac{3\pi}{n}+i\sin.\frac{3\pi}{n},\ \cos.\frac{\pi}{n}-i\sin.\frac{3\pi}{n}, \\ \text{etc.....} \\ \cos.\frac{(n-1)\pi}{n}+i\sin.\frac{(n-1)\pi}{n},\ \cos.\frac{(n-1)\pi}{n}-i\sin.\frac{(n-1)\pi}{n}. \end{cases}$$

Es sei z. B. $n=2$, so findet man zwei Werthe von $((-1))^{\frac{1}{2}}$, d. h. zwei Werthe von x, welche der Gleichung

$$x^2=-1$$

Genüge leisten; aber beide Werthe sind imaginär und respective folgende

$$\cos.\frac{\pi}{2}+i\sin.\frac{\pi}{2}=+i,$$

$$\cos.\frac{\pi}{2}-i\sin.\frac{\pi}{2}=-i.$$

Ist $n=4$, so findet man 4 Werthe von $((-1))^{\frac{1}{4}}$, d. h. vier Werthe von x, welche der Gleichung

$$x^4=-1$$

Genüge leisten, gegeben durch die Ausdrücke

$$\cos.\frac{\pi}{4}\pm i\sin.\frac{\pi}{4},$$

$$\cos.\frac{3\pi}{4}\pm i\sin.\frac{3\pi}{4},$$

oder, was dasselbe ist, durch den Ausdruck

$$\pm\cos.\frac{\pi}{4}\pm i\sin.\frac{\pi}{4}.$$

Nun ist aber

$$\cos.\frac{\pi}{4}=\sin.\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

mithin

$$((-1))^{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{i}{2^{\frac{1}{2}}}.$$

Zusatz 2. Ist n ungerade, so sind die verschiedenen Werthe, welche $2k+1$ haben kann, respective

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ n-2,\ n.$$

Für jeden dieser Werthe erhält man aus (13) im Allgemeinen zwei gepaarte imaginäre Werthe von $((-1))^{\frac{1}{n}}$, d. h. zwei gepaarte imaginäre n^{te} Wurzeln von -1; allein für $2k+1=n$ gibt die Formel einen einzigen und reellen Werth -1. Wenn also n ungerade ist, so läßt $((-1))^{\frac{1}{n}}$ außer dem einzigen reellen Werthe -1, noch $n-1$ imaginäre Werthe zu, welche man paarweise erhält, und zwar folgende:

$$(15)\begin{cases} \cos.\frac{\pi}{n} + i\sin.\frac{\pi}{n},\ \cos.\frac{\pi}{n} - i\sin.\frac{\pi}{n}, \\ \cos.\frac{3\pi}{n} + i\sin.\frac{3\pi}{n},\ \cos.\frac{3\pi}{n} - i\sin.\frac{3\pi}{n}, \\ \text{etc.}\ldots. \\ \cos.\frac{(n-2)\pi}{n} + i\sin.\frac{(n-2)\pi}{n},\ \cos.\frac{(n-2)\pi}{n} - i\sin.\frac{2\pi}{n}. \end{cases}$$

Die Anzahl aller dieser reellen und imaginären Werthe ist n.

Es sei z. B. $n = 3$, so findet man drei Werthe von $((-1))^{\frac{1}{3}}$, d. h. drei Werthe von x, welche der Gleichung

$$x^3 = -1$$

Genüge leisten, nämlich

$$-1,$$

$$\cos.\frac{\pi}{3} + i\sin.\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{3^{\frac{1}{2}}.i}{2},$$

$$\cos.\frac{\pi}{3} - i\sin.\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{3^{\frac{1}{2}}.i}{2}.$$

Zusatz 3. Wenn n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, so hat der Ausdruck $((-1))^{\frac{1}{n}}$, n theils reelle, theils imaginäre

Werthe, d. h., die Anzahl der Werthe von x, welche der Gleichung $x^n = -1$ Genüge leisten, ist immer n.

Aufgabe 5. Die verschiedenen reellen oder imaginären Werthe von $((-1))^{\frac{m}{n}}$ zu finden.

Auflösung. Es seien m und n Primzahlen unter sich; so hat man, nach der Definition von $((-1))^{\frac{m}{n}}$,

$$((-1))^{\frac{m}{n}} = \left[((-1))^{\frac{1}{n}}\right]^m,$$

und setzt man für $((-1))^{\frac{1}{n}}$ seinen allgemeinen Werth aus (13), so findet man

$$(16) \quad ((-1))^{\frac{m}{n}} = \cos.\frac{m(2k+1)\pi}{n} \pm i \sin.\frac{m(2k+1)\pi}{n}.$$

Um aus dieser Formel alle Werthe von $((-1))^{\frac{m}{n}}$ abzuleiten, darf man nur successive für $2k+1$ alle ganzen und ungeraden Zahlen zwischen 0 und n setzen. Es seien $2k'+1$, $2k''+1$ zwei dieser Werthe, und zwar ungleiche, so behaupte ich, daß

$$\cos.\frac{m(2k'+1)\pi}{n}, \quad \cos.\frac{m.(2k''+1)\pi}{n}$$

nicht einerlei Werth haben können. Da nämlich diese Cosinusse nur dann einander gleich sein können, wenn zwischen den ihnen correspondirenden Bogen eine Gleichung von der Form

$$\frac{m(2k'+1)\pi}{n} = \pm 2h\pi \pm \frac{m(2k''+1)\pi}{n}$$

stattfindet, wo h eine ganze Zahl bezeichnet; da man ferner aus dieser Gleichung erhält

$$h = \frac{m\left[\frac{\pm(2k'+1)\pm(2k''+1)}{2}\right]}{n},$$

so müßte, da m und n Primzahlen unter sich sind, die Zahl

$$\frac{\pm(2k'+1)\pm(2k''+1)}{2};$$

durch n theilbar sein; was aber nicht der Fall sein kann, indem

die Zahlen $2k'+1$, $2k''+1$, von welchen keine größer als n sein kann, ungleich sind; so daß also ihre halbe Summe, um so mehr ihre halbe Differenz, nothwendig kleiner als n sein muß. Für zwei verschiedene Werthe von $2k+1$, welche zwischen den Grenzen 0 und n liegen, erhält man demnach auch zwei verschiedene Werthe von

$$\cos. \frac{m(2k+1)\pi}{n};$$

woraus sich denn gar leicht ergibt, daß die Anzahl der durch die Gleichung (16) gegebenen Werthe von $((-1))^{\frac{m}{n}}$ n beträgt, wie dies auch bei $((1))^{\frac{1}{n}}$ und $((-1))^{\frac{1}{n}}$ der Fall ist. Man hat aber auch offenbar

$$\left[\cos. \frac{m(2k+1)\pi}{n} \pm i \sin. \frac{m(2k+1)\pi}{n}\right]^n$$
$$= \cos. m(2k+1)\pi \pm i . \sin. m(2k+1)\pi$$
$$= (-1)^m = \pm 1;$$

woraus denn folgt, daß jeder Werth von $((-1))^{\frac{m}{n}}$ ein reeller oder imaginärer Ausdruck ist, dessen n^{te} Potenz gleich ± 1 ist; folglich ist er auch ein Werth von $((1))^{\frac{1}{n}}$ oder von $((-1))^{\frac{1}{n}}$. Es ist mithin

$$(17) \qquad ((-1))^{\frac{m}{n}} = ((-1))^{\frac{1}{n}},$$

so oft $(-1)^m = 1$ ist, d. h., so oft m eine gerade Zahl ist, und

$$(18) \qquad ((-1))^{\frac{m}{n}} = ((1))^{\frac{1}{n}},$$

so oft $((-1))^m = -1$, d. h. so oft m eine ungerade Zahl ist. Die Formeln (17) und (18) lassen sich auch in folgende zusammenziehen:

$$(19) \qquad ((-1))^{\frac{m}{n}} = (((-1)^m))^{\frac{1}{n}}.$$

Aufgabe 6. Die verschiedenen reellen oder imaginären Werthe von $((-1))^{-\frac{m}{n}}$ zu finden.

Auflösung. Nach der Definition der negativen Potenzen ist

$$((-1))^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{((-1))^{\frac{m}{n}}}.$$

Setzt man also für $((-1))^{\frac{m}{n}}$ seinen allgemeinen Werth aus (16), so erhält man nach Formel (9) im vorigen Paragraphen

$$(20)\quad ((-1))^{-\frac{m}{n}} = \cos.\frac{m(2k+1)\pi}{n} \mp i \sin.\frac{m(2k+1)\pi}{n};$$

woraus denn folgt, daß die verschiedenen Werthe von $((-1))^{-\frac{m}{n}}$ mit denen von $((-1))^{\frac{m}{n}}$ übereinstimmen. Man hat demnach

$$(21)\quad ((-1))^{-\frac{m}{n}} = ((1))^{\frac{m}{n}},$$ wenn m gerade ist, und

$$(22)\quad ((-1))^{-\frac{m}{n}} = ((-1))^{\frac{1}{n}},$$ wenn m ungerade ist.

Die beiden letzten Formeln können in

$$(23)\quad ((-1))^{-\frac{m}{n}} = (((-1)^m))^{\frac{1}{n}}$$

zusammengezogen werden.

Zusatz. Ist $m = 1$, so erhält man aus (23)

$$(24)\quad ((-1))^{-\frac{1}{n}} = ((-1))^{\frac{1}{n}}.$$

Indem wir diesen Paragraphen beendigen, machen wir noch darauf aufmerksam, daß die Gleichungen (3), (6), (8), (13), (16) und (20), mit Hülfe deren wir die Werthe von

$$((1))^{\frac{1}{n}}, ((1))^{\frac{m}{n}}, ((1))^{-\frac{m}{n}},$$

$$((-1))^{\frac{1}{n}}, ((-1))^{\frac{m}{n}}, ((-1))^{-\frac{m}{n}},$$

erhalten, in zwei Formeln zusammengezogen werden können. Denn wenn a einen positiven oder negativen Bruch bedeutet, so wird der durch die Gleichung (3), (6) oder (8) bestimmte Werth von $((1))^a$ offenbar

$$(25)\quad ((1))^a = \cos. 2k a\pi \pm i. \sin. 2k a\pi,$$

indeſſen der Werth von $((-1))^a$, welcher durch die Gleichungen (13), (16) oder (20) beſtimmt wird,

(26) $((-1))^a = \cos.(2k+1)a\pi \pm i \sin.(2k+1)a\pi$

ſein wird. Uebrigens kann in dieſen beiden Formeln auch für k eine beliebige ganze Zahl geſetzt werden.

§. 4. Von den Wurzeln aus imaginären Ausdrücken und von deren gebrochenen und irrationalen Potenzen.

Es ſei

$$\alpha + \beta i$$

ein beliebiger imaginärer Ausdruck, ſo wird man nach §. 2. immer einen poſitiven Werth von ϱ und unendlich viele reelle Werthe von θ finden können, welche der Gleichung

(1) $$\alpha + \beta i = \varrho(\cos.\theta + i \sin.\theta)$$

Genüge leiſten.

Bedient man ſich der §. 1. angenommenen Bezeichnungen, ſo werden die n^{ten} Wurzeln von $\alpha + \beta i$, oder ihre $\frac{1}{n}^{ten}$ Potenzen die verſchiedenen Werthe von

$$\sqrt[n]{\alpha + \beta i} = ((\alpha + \beta i))^{\frac{1}{n}}$$

ſein; desgleichen ſind die poſitiven oder negativen gebrochenen Potenzen vom Grade $\frac{m}{n}$ oder $-\frac{m}{n}$ die verſchiedenen Werthe von

$((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}}$, oder von $((\alpha + \beta i))^{-\frac{m}{n}}$.

Um dieſe Wurzeln und Potenzen beſtimmen zu können, muß man folgende drei Aufgaben löſen.

Aufgabe 1. Die verſchiedenen Werthe von $((\alpha + \beta i))^{\frac{1}{n}}$ zu finden.

Auflöſung. Es ſei

$$x = r(\cos.t + i \sin.t)$$

einer dieſer Werthe, wo r eine poſitive Größe, und t einen reellen Bogen bezeichnet. Nach der Definition von $((\alpha+\beta i))^{\frac{1}{n}}$ iſt

(2) $$x^n = \alpha + \beta i = \varrho(\cos.\theta + i . \sin.\theta);$$

oder, was daſſelbe iſt,

$$r^n[\cos. nt + i . \sin. nt] = \varrho(\cos. \theta + i . \sin. \theta).$$

Aus dieſer Gleichung ergibt ſich nach §. 2., Lehrſ. 1.

$$r^n = \varrho$$

$$\cos. nt + i . \sin. nt = \cos. \theta + i . \sin. \theta,$$

folglich

$$r = \varrho^{\frac{1}{n}},$$

$$\cos. nt = \cos. \theta, \quad \sin. nt = \sin. \theta, \quad nt = \theta \pm 2k\pi,$$

$$t = \frac{\theta \pm 2k\pi}{n},$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Da nun r und t auf dieſe Weiſe gefunden ſind, ſo wird offenbar die Formel

$$x = \varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos. \frac{\theta \pm 2k\pi}{n} + i . \sin. \frac{\theta \pm 2k\pi}{n}\right]$$

$$= \varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos. \frac{\theta}{n} + i . \sin. \frac{\theta}{n}\right]\left[\cos. \frac{2k\pi}{n} \pm i . \sin. \frac{2k\pi}{n}\right],$$

oder, was daſſelbe iſt, folgende Formel

$$(3) \qquad x = \varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos. \frac{\theta}{n} + i \sin. \frac{\theta}{n}\right]. ((1))^{\frac{1}{n}}$$

die verſchiedenen Werthe von x geben, welche der Gleichung (1) Genüge leiſten. Der Ausdruck $((\alpha + \beta i))^{\frac{1}{n}}$ hat alſo ebenſowohl als $((1))^{\frac{1}{n}}$, n verſchiedene, durch die Gleichung

$$(4) \quad ((\alpha + \beta i))^{\frac{1}{n}} = \varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos. \frac{\theta}{n} + i . \sin. \frac{\theta}{n}\right]. ((1))^{\frac{1}{n}}$$

beſtimmte Werthe.

Zuſatz 1. Es ſei $n = 2$; ſo findet man zwei Werthe von $((\alpha + \beta i))^{\frac{1}{2}}$, d. h. zwei Werthe von x, welche der Gleichung

$$x^2 = \alpha + \beta i = \varrho(\cos. \theta + i . \sin. \theta)$$

Genüge leiſten, und welche durch den Ausdruck

$$\pm \varrho^{\frac{1}{2}}\left(\cos. \frac{\theta}{2} + i . \sin. \frac{\theta}{2}\right)$$

gegeben ſind.

Zusatz 2. Es sei $n = 3$; so findet man drei Werthe von $((\alpha + \beta i))^{\frac{1}{3}}$, d. h. drei Werthe von x, welche der Gleichung

$$x^3 = \alpha + \beta i = \varrho(\cos.\theta + i . \sin.\theta)$$

Genüge leisten, und zwar

$$\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos.\frac{\theta}{3} + i . \sin.\frac{\theta}{3}\right),$$

$$\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos.\frac{\theta}{3} + i . \sin.\frac{\theta}{3}\right)\left(\cos.\frac{2\pi}{3} + i . \sin.\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos.\frac{\theta+2\pi}{3} + i . \sin.\frac{\theta+2\pi}{3}\right),$$

$$\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos.\frac{\theta}{3} + i . \sin.\frac{\theta}{3}\right)\left(\cos.\frac{2\pi}{3} - i . \sin.\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos.\frac{\theta-2\pi}{3} + i . \sin.\frac{\theta-2\pi}{3}\right).$$

Zusatz 3. Es sei $n = 4$; so findet man vier Werthe von $((\alpha + \beta i))^{\frac{1}{4}}$, d. h. vier Werthe von x, welche der Gleichung

$$x^4 = \alpha + \beta i = \varrho(\cos.\theta + i . \sin.\theta)$$

Genüge leisten, und zwar

$$\pm\varrho^{\frac{1}{4}}\left(\cos.\frac{\theta}{4} + i . \sin.\frac{\theta}{4}\right),$$

$$\pm\varrho^{\frac{1}{4}}\left(\sin.\frac{\theta}{4} - i . \cos.\frac{\theta}{4}\right).$$

Aufgabe 2. Die verschiedenen Werthe von

$$((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}}$$

zu finden.

Auflösung. Sind m und n Primzahlen unter sich, so ist nach der Definition von $((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}}$,

$$((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}} = \left[((\alpha + \beta i))^{\frac{1}{n}}\right]^m;$$

mithin, wenn man für $((\alpha + \beta i))^{\frac{1}{n}}$ seinen allgemeinen Werth aus (4) setzt,

$$(5)\quad ((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}} = \varrho^{\frac{m}{n}}\left[\cos.\frac{m\theta}{n}+i.\sin.\frac{m\theta}{n}\right].((1))^{\frac{m}{n}}.$$

Zusatz 1. Setzt man in (5) für $((1))^{\frac{1}{n}}$ dessen allgemeinen Werth aus der Formel (6), (§. 3.), so erhält man

$$(6)\quad ((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}} = \varrho^{\frac{m}{n}}\left[\cos.\frac{m(\theta\pm 2k\pi)}{n}+i.\sin.\frac{m(\theta\pm 2k\pi)}{n}\right].$$

Aufgabe 3. Die verschiedenen Werthe von $((\alpha+\beta i))^{-\frac{m}{n}}$ zu finden.

Auflösung. Es ist

$$((\alpha+\beta i))^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}}}.$$

Setzt man daher für $((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}}$ seinen allgemeinen Werth aus (6), so hat man nach §. 2., Formel (17)

$$((\alpha+\beta i))^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\varrho^{\frac{m}{n}}}\left[\cos.\frac{m(\theta\pm 2k\pi)}{n}-i.\sin.\frac{m(\theta\pm 2k\pi)}{n}\right]$$

$$= \varrho^{-\frac{m}{n}}\left[\cos.\frac{m\theta}{n}-i.\sin.\frac{m\theta}{n}\right]\left[\cos.\frac{m.2k\pi}{n}+i.\sin.\frac{m.2k\pi}{n}\right],$$

oder endlich

$$(7)\quad ((\alpha+\beta i))^{-\frac{m}{n}} = \varrho^{-\frac{m}{n}}\left[\cos.\frac{m\theta}{n}-i.\sin.\frac{m\theta}{n}\right].((1))^{-\frac{m}{n}}.$$

Zusatz 1. Ist $m=1$, so erhält man aus (7)

$$(8)\quad ((\alpha+\beta i))^{-\frac{1}{n}} = \varrho^{-\frac{1}{n}}\left[\cos.\frac{\theta}{n}-i.\sin.\frac{\theta}{n}\right].((1))^{-\frac{1}{n}}.$$

Man sieht leicht ein, daß die Gleichungen (4), (5), (8) und (7), vermittelst deren die verschiedenen Werthe der vier Ausdrücke

$$((\alpha+\beta i))^{\frac{1}{n}},\quad ((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}},$$

$$((\alpha+\beta i))^{-\frac{1}{n}},\quad ((\alpha+\beta i))^{-\frac{m}{n}},$$

bestimmt wurden, sich in eine einzige Formel zusammenziehen lassen. Wenn a einen positiven oder negativen Bruch bezeichnet, so ist diese Formel folgende:

$$(9)\quad ((\alpha+\beta i))^{a} = \varrho^{a}\left[\cos.a\theta+i.\sin.a\theta\right].((1))^{a}.$$

In den vorhergehenden Rechnungen bedeutet ϱ beständig den Modulus des imaginären Ausdrucks $\alpha + \beta i$, d. h. es bedeutet die positive Größe $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$, und θ irgend einen von den Bogen, welche der Gleichung (1), oder, was dasselbe ist, den Gleichungen (4) des §. 2., also den Gleichungen

$$(10)\quad \begin{cases} \cos.\ \theta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}, \\ \sin.\ \theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2}} \end{cases}$$

Genüge leisten. Dividirt man die zweite dieser Gleichungen durch die erste, so erhält man

$$(11)\qquad \text{tang.}\ \theta = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ist daher, abgesehen vom Zeichen, ζ der kleinste Bogen, dessen Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ ist, oder macht man

$$(12)\qquad \zeta = \text{arc. tang.}\ \frac{\beta}{\alpha},$$

so ist

$$(13)\qquad \text{tang.}\ \theta = \text{tang.}\ \zeta.$$

Es ist übrigens in allen obigen Formeln leicht, den Bogen ζ, dessen Werth völlig bestimmt ist, für den Bogen θ einzuführen. Es bedarf hierzu nur folgender Betrachtungen. Da die Bogen θ und ζ einerlei Tangente haben, so müssen sie auch, abgesehen vom Zeichen, einerlei Sinus und Cosinus haben, und da überdies die Gleichung (13) unter die Form

$$\frac{\text{sin.}\ \theta}{\cos.\ \theta} = \frac{\text{sin.}\ \zeta}{\cos.\ \zeta}$$

gebracht werden kann, so ist es einleuchtend, daß man zu gleicher Zeit setzen muß

$$(14)\qquad \cos.\ \theta = \cos.\ \zeta,\quad \text{sin.}\ \theta = \text{sin.}\ \zeta,\quad \text{oder}$$

$$(15)\qquad \cos.\ \theta = -\cos.\ \zeta,\quad \text{sin.}\ \theta = -\text{sin.}\ \zeta.$$

Da nun aber der durch die erste von den Gleichungen (10) gegebene cos. θ offenbar einerlei Zeichen mit α hat, während

der Bogen ζ, da er zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ liegt, beständig einen positiven Cosinus hat, so folgt, daß die Gleichungen (14) gelten, wenn α positiv ist; die Gleichungen (15) dagegen, wenn α negativ ist. Wir wollen nun sehen, worauf sich in diesen beiden Fällen die Formeln (1) und (9) reduciren.

Ist α positiv, so treten die Gleichungen (14) an die Stelle von (10) und ergeben eine unendliche Menge von Werthen für θ, unter denen folgender

$$\theta = \zeta \tag{16}$$

zu merken ist. Bedient man sich dieses Werthes, so verwandeln sich die Formeln (1) und (4) respective in

$$\alpha + \beta i = \varrho\,(\cos.\zeta + i\,.\,\sin.\zeta), \tag{17}$$

$$((\alpha+\beta i))^a = \varrho^a(\cos.a\zeta + i\,.\,\sin.a\zeta)\,.\,((1))^a. \tag{18}$$

Ist dagegen α negativ, so treten die Formeln (15) an die Stelle von (10), und man erhält unter andern Werthen von θ,

$$\theta = \zeta + \pi. \tag{19}$$

Folglich kann man in diesem Falle für die Formeln (1) und (9) folgende substituiren

$$\alpha + \beta i = -\varrho\,(\cos.\zeta + i\,.\,\sin.\zeta) \tag{20}$$

$$(21)\quad \begin{cases} ((\alpha+\beta i))^a \\ = \varrho^a\,[\cos.(a\zeta + a\pi) + i\,.\,\sin.(a\zeta + a\pi)]\,((1))^a. \\ = \varrho^a\,(\cos.a\zeta + i\,.\,\sin.a\zeta)\,(\cos.a\pi + i\,.\,\sin.a\pi)\,((1))^a. \end{cases}$$

Setzt man hier $\alpha+\beta i = -1$, d.h. $\alpha = -1$, $\beta = 0$, so findet man

$$\zeta = \text{arc. tang.}\left(\frac{0}{-1}\right) = 0,$$

und die Formel (21) geht über in

$$((-1))^a = (\cos.a\pi + i\,.\,\sin.a\pi)\,.\,((1))^a; \tag{22}$$

woraus denn in dem angenommenen Falle allgemein folgt

$$((\alpha+\beta i))^a = \varrho^a\,(\cos.a\zeta + i\,.\,\sin.a\zeta)\,.\,((-1))^a. \tag{23}$$

Verbindet man die Formeln (25) und (26) des §. 3. mit den Formeln (17), (18), (20) und (23), so ergibt sich Folgendes:

Es sei $\alpha+\beta i$ ein beliebiger imaginärer Ausdruck, a ein positiver oder negativer Bruch, und k eine beliebige ganze Zahl. Setzt man ferner

(24) $\varrho = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)},\ \zeta = \text{arc. tang.}\ \frac{\beta}{\alpha},$

so erhält man für positive Werthe von α

$$(25)\quad \begin{cases} \alpha + \beta i = \varrho\,(\cos.\,\zeta + i\,.\,\sin.\,\zeta), \\ ((\alpha + \beta i))^a = \varrho^a\,(\cos.\,a\zeta + i\,.\,\sin.\,a\zeta)\,.\,((1))^a, \\ ((1))^a = \cos.\,2k\,a\pi \pm i\,.\,\sin.\,2k\,a\pi; \end{cases}$$

und für negative Werthe von α,

$$(26)\quad \begin{cases} \alpha + \beta i = -\varrho\,(\cos.\,\zeta + i\,.\,\sin.\,\zeta), \\ ((\alpha + \beta i))^a = \varrho^a\,(\cos.\,a\zeta + i\,.\,\sin.\,a\zeta)\,((-1))^a, \\ ((-1))^a = \cos.\,(\overline{2k+1}\,.\,a\pi) \pm i\,.\,\sin.\,(\overline{2k+1}\,.\,a\pi). \end{cases}$$

Es ist noch zu bemerken, daß, wenn man durch n den Nenner des einfachsten Bruches bezeichnet, welcher den Zahlenwerth von a ausdrückt, n genau die Anzahl der verschiedenen Werthe von

$$((1))^a,\ ((-1))^a,\ ((\alpha + \beta i))^a$$

sein muß, und daß man, um eben diese Werthe aus den Formeln (25) und (26) abzuleiten, darin nur successive für $2k$ und $2k+1$ alle ganzen Zahlen substituiren darf, welche nicht über die Grenzen 0 und n hinausfallen.

Wenn der Zahlenwerth von α irrational ist, so hat jeder der reducirten Ausdrücke

$$\cos.\,2k\,a\pi \pm i\,.\,\sin.\,2k\,a\pi,$$

$$\cos.\,(\overline{2k+1}\,.\,a\pi) \pm i\,.\,\sin.\,(\overline{2k+1}\,.\,a\pi)$$

eine unendliche Anzahl von Werthen, welche den verschiedenen ganzen Werthen von k entsprechen; man kann sich demnach in diesem Falle nur dann noch der Zeichen

$$((1))^a,\ ((-1))^a,\ ((\alpha + \beta i))^a$$

bedienen, wenn man annimmt, daß jedes derselben eine unendliche Menge von imaginären Ausdrücken bezeichnet, welche sämmtlich von einander verschieden sind. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, wollen wir besagte Zeichen nur dann gebrauchen, wenn a ein rationaler Bruch ist.

Einer der Werthe von $((1))^a$ ist immer reell und positiv, nämlich $+1$ (oder $(1)^a = 1^a$). Substituirt man diesen

Werth von $((1))^a$ in (25) — (zweite Gleichung) —, so erhält man den correspondirenden Werth von

$$((\alpha + \beta i))^a,$$

welcher fortan immer durch

$$(\alpha + \beta i)^a$$

bezeichnet werden soll. Mithin ist, wenn α positiv ist, und die Größen ϱ und ζ durch die Gleichungen (24) bestimmt werden,

$$(27) \qquad (\alpha + \beta i)^a = \varrho^a (\cos. a\zeta + i . \sin. a\zeta).$$

Da diese Gleichung für alle ganzen und gebrochenen Zahlenwerthe von a gilt, so kann auch angenommen werden, daß sie selbst dann gelten wird, wenn a irrational ist. Wir wollen demnach das Product $\varrho^a (\cos. a\zeta + i . \sin. a\zeta)$ durch

$$(\alpha + \beta i)^a$$

bezeichnen, wenn α positiv ist, gleichviel, welchen Werth die Größe a haben mag. Mit andern Worten: wenn man unter ζ sich einen zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen denkt, so ist, unabhängig von jedem besonderen Werthe von a

$$[\varrho(\cos. \zeta + i . \sin. \zeta]^a = \varrho^a (\cos. a\zeta + i . \sin. a\zeta).$$

Setzt man in dieser Gleichung $\varrho = 1$, so verwandelt sie sich in

$$(28) \qquad (\cos. \zeta + i . \sin. \zeta)^a = \cos. a\zeta + i . \sin. a\zeta.$$

Diese Formel stimmt mit den Gleichungen (10) und (14) des §. 2. überein, nur mit dem Unterschiede, daß ζ beständig zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ liegt, während jene Gleichungen sich auf alle möglichen Werthe von θ erstrecken.

Ist α negativ, so läßt sich derjenige Werth von $((\alpha+\beta i))^a$, welchen man (allgemein) von den übrigen durch die Bezeichnung

$$(\alpha + \beta i)^a$$

unterscheiden kann, nicht mehr angeben, selbst dann nicht, wenn der Zahlenwerth von a nur ein gemeiner Bruch ist.

Da aber alsdann $-\alpha$ eine positive Größe ist, so findet man leicht für beliebige Werthe von a die Formel

$$(29) \qquad (-\alpha + \beta i)^a = \varrho^a (\cos. a\zeta + i . \sin. a\zeta).$$

Wir beschließen diesen Paragraphen mit der Bemerkung,

daß, wenn der Zahlenwerth von a ein Bruch ist, die Gleichung (18) und (23) durch die Formeln (27) und (29) auf folgende reducirt werden

$$(30) \quad ((\alpha+\beta i))^a = (\alpha+\beta i)^a \,.\, ((1))^a,$$

$$(31) \quad ((\alpha+\beta i))^a = (-\alpha-\beta i)^a \,.\, ((-1))^a,$$

und daß die Gleichung (30) für positive, die Gleichung (31) dagegen für negative Werthe von α gilt.

§. 5. Beispiele der Anwendung der in dem vorhergehenden Paragraphen entwickelten Principien.

Wir wollen vermittelst dieser Principien drei Aufgaben über die Sinus und Cosinus auflösen.

Aufgabe 1. Sin. mz und cos. mz (wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet) in ein nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von sin. z geordnetes Polynom, oder doch wenigstens in das Product eines solchen Polynoms und cos. z zu verwandeln.

Auflösung. Führt man in (12) des §. 2. statt der geraden Potenzen von cos. z die ganzen Potenzen von $1-\sin. z^2$ ein, so verwandeln sich jene Gleichungen für gerade Werthe von m in

$$\cos. mz =$$

$$(1-\sin. z^2)^{\frac{m}{2}} - \frac{m(m-1)}{1.2}(1-\sin. z^2)^{\frac{m-2}{2}} \,.\, \sin. z^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(1-\sin. z^2)^{\frac{m-4}{2}} \,.\, \sin. z^4 - \text{etc....}$$

$$\sin. mz = \cos. z\left[\frac{m}{1}(1-\sin. z^2)^{\frac{m-2}{2}} \,.\, \sin. z\right.$$

$$\left. -\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(1-\sin. z^2)^{\frac{m-4}{2}} \,.\, \sin. z^3 + \text{etc.....}\right],$$

und für ungerade Werthe von m in

$$\cos. mz =$$

$$\cos. z\left[(1-\sin. z^2)^{\frac{m-1}{2}} - \frac{m(m-1)}{1.2}(1-\sin. z^2)^{\frac{m-3}{2}} \,.\, \sin. z^2\right.$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}(1-\sin.z^2)^{\frac{m-5}{2}}.\sin.z^4-\text{etc.}\ldots.\Big]$$

$$\sin.\ mz =$$

$$\frac{m}{1}(-\sin.z^2)^{\frac{m-1}{2}}.\sin.z-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(1-\sin.z^2)^{\frac{m-3}{2}}.\sin.z^3$$

$$+\text{etc.}\ldots\ldots$$

Entwickelt man in jeder dieser Formeln den zweiten Theil oder doch wenigstens den Coefficienten von z im zweiten Theile in ein nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von sin. z geordnetes Polynom, so findet man für gerade Werthe von m,

$$(1)\begin{cases}\cos.\ mz=1-\frac{m}{1}\left(\frac{m-1}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin.\ z^2\\ +\frac{m(m-2)}{1.3}\left(\frac{(m-1)(m-3)}{2.4}+\frac{m-1}{2}.\frac{3}{2}+\frac{1.3}{2.4}\right)\sin.z^4-\text{etc..,}\\ \sin.mz=\cos.z\left[\frac{m}{1}\sin.-z\frac{m(m-2)}{1.3}\left(\frac{(m-1}{2}+\frac{3}{2}\right)\sin.\ z^3\right.\\ \left.+\frac{m(m-2)(m-4)}{1.3.5}\left(\frac{(m-1)(m-3)}{2.4}+\frac{m-1}{2}.\frac{5}{2}+\frac{3.5}{2.4}\right)\sin.z^5-..\right]\end{cases}$$

und für ungerade Werthe von m,

$$(2)\begin{cases}\cos.\ mz=\cos.\ z\left[1-\frac{m-1}{1}\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin.\ z^2\right.\\ \left.+\frac{(m-1)(m-3)}{1.\ 3}\left(\frac{m(m-2)}{2.4}+\frac{m}{2}.\frac{3}{2}+\frac{1.3}{2.4}\right)\sin.z^4-\text{etc...}\right],\\ \sin.mz=\frac{m}{1}\sin.z-\frac{m(m-1)}{1.3}\left(\frac{m-2}{2}+\frac{3}{2}\right)\sin.\ z^3\\ +m(m-1)(m-3)\left(\frac{(m-2)(m-4)}{2.\ 4}+\frac{m-2}{2}.\frac{5}{2}+\frac{3.5}{2.4}\right)\sin.\ z^5\\ -\text{etc.}\ldots\ldots\end{cases}$$

Es kommt jetzt nur noch darauf an, die Gleichungen (1) und (2) auf die einfachste Form zu bringen. Dies geschieht, wenn der Coefficient einer jeden Potenz von sin. z nach Cap. 4. (§. 3., Gleichung 5.) in einen einzigen Bruch verwandelt wird. Vermittelst dieser Reduction erhält man für gerade Werthe von m,

$$(3)\begin{cases}\cos.\, mz = 1 - \dfrac{m\,m}{1.2}\sin.\, z^2 + \dfrac{(m+2)mm(m-2)}{1.\,2.\,3.\,4}\sin.\, z^4 \\ - \dfrac{(m+4)(m+2)\,m\,m\,(m-2)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\sin.\, z^6 + \text{etc.}\ldots.\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}\sin.\, mz = \cos.\, z\left[\dfrac{m}{1}\sin.\, z - \dfrac{(m+2)m(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\sin.\, z^3\right. \\ \left. + \dfrac{(m+4)(m+2)\,m\,(m-2)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\sin.\, z^5 - \text{etc.}\ldots\right],\end{cases}$$

und für ungerade Werthe von m

$$(5)\begin{cases}\cos.\, mz = \cos.\, z\left[1 - \dfrac{(m+1)(m-1)}{1.\ 2}\sin.\, z^2\right. \\ \left. + \dfrac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\sin.\, z^4 - \text{etc.}\ldots.\right],\end{cases}$$

$$(6)\begin{cases}\sin.\, mz = \dfrac{m}{1}\sin.\, z - \dfrac{(m+1)\,m\,(m-1)}{1.\ 2.\ 3}\sin.\, z^3 \\ + \dfrac{(m+3)(m+1)\,m\,(m-1)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\sin.\, z^5 - \text{etc.}\ldots.\end{cases}$$

Zusatz 1. Setzt man in (3) successive

$$m = 2,\quad m = 4,\quad m = 6,\ \text{etc.}\ldots.$$

so erhält man

$$(7)\begin{cases}\cos.\, 2z = 1 - 2\sin.\, z^2, \\ \cos.\, 4z = 1 - 8\sin.\, z^2 + 8\sin.\, z^4, \\ \cos.\, 6z = 1 - 18\sin.\, z^2 + 48\sin.\, z^4 - 32\sin.\, z^6, \\ \text{etc.}\ldots..\end{cases}$$

Zusatz 2. Setzt man in (6) successive

$$m = 1,\ m = 3,\ m = 5,\ \text{etc.}\ldots.,$$

so findet man

$$(8)\begin{cases}\sin.\, z = \sin.\, z, \\ \sin.\, 3z = 3\sin.\, z - 4\sin.\, z^3, \\ \sin.\, 5z = 5\sin.\, z - 20\sin.\, z^3 + 16\sin.\, z^5, \\ \text{etc.}\ldots..\end{cases}$$

Aufgabe 2. Sin. mz und cos. mz (wo m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet) in ein nach den

aufsteigenden und ganzen Potenzen von cos. z geordnetes Polynom, oder doch wenigstens in das Product eines solchen Polynoms und des Factors sin. z zu verwandeln.

Auflösung. Um die gesuchten Formeln zu erhalten, darf man nur in (3), (4), (5) und (6), $\frac{\pi}{2} - z$ für z substituiren; wobei zu bemerken ist, daß für gerade Werthe von m

$$\cos.\left(\frac{m\pi}{2} - mz\right) = (-1)^{\frac{m}{2}} . \cos. mz,$$

$$\sin.\left(\frac{m\pi}{2} - mz\right) = (-1)^{\frac{m}{2}+1} . \sin. mz,$$

und für ungerade Werthe von m

$$\cos.\left(\frac{m\pi}{2} - mz\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} . \sin. mz,$$

$$\sin.\left(\frac{m\pi}{2} - mz\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} . \cos. mz$$

ist. Auf diese Weise findet man für gerade Werthe von m

$$(9)\begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} . \cos. mz = 1 - \frac{mm}{2} \cos. z^2 + \frac{(m+2)mm(m-2)}{1.2.3.4} \cos. z^4 \\ - \frac{(m+4)(m+2)mm(m-2)(m-4)}{1.2.3.4.5.6} \sin. z^6 + \text{etc.....}, \end{cases}$$

$$(10)\begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}+1} . \sin. mz = \sin. z \left[\frac{m}{1} \cos. z - \frac{(m+2)m(m-2)}{1.2.3} \cos. z^3 \right. \\ \left. + \frac{(m+4)(m+2)m(m-2))m-4)}{1.2.3.4.5} \cos. z^5 - \text{etc.....} \right]; \end{cases}$$

und für ungerade Werthe von m,

$$(11)\begin{cases} (-1)^{\frac{m-1}{2}} . \sin. mz = \sin. z \left[1 - \frac{(m+1)(m-1)}{1.2} \cos. z^2 \right. \\ \left. + \frac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{1.2.3.4} \cos. z^4 - \text{etc.....} \right], \end{cases}$$

$$(12)\begin{cases} (-1)^{\frac{m-1}{2}} . \cos. mz = \frac{m}{1} \cos. z - \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} \cos. z^3 \\ + \frac{(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3)}{1.2.3.4.5} \cos. z^5 - \text{etc.} \ldots \end{cases}$$

Zusatz 1. Setzt man in (9) successive

$$m = 2,\ m = 4,\ m = 6,\ \text{etc.}\ldots,$$

so erhält man

$$(13)\begin{cases} -\cos. 2z = 1 - 2\cos. z^2, \\ \cos. 4z = 1 - 8\cos. z^2 + 8\cos. z^4 \\ -\cos. 6z = 1 - 18\cos. z^2 + 48\cos. z^4 - 32\cos. z^6, \\ \text{etc.}\ldots\ldots \end{cases}$$

Zusatz 2. Setzt man in (12) successive

$$m = 1,\ m = 3,\ m = 5,\ \text{etc.}\ldots\ldots,$$

so ergibt sich

$$(14)\begin{cases} \cos. z = \cos. z, \\ -\cos. 3z = 3\cos. z - 4\cos. z^3, \\ \cos. 5z = 5\cos. z - 20\cos. z^3 + 16\cos. z^5, \\ \text{etc.}\ldots\ldots \end{cases}$$

Aufgabe 3. Die ganzen Potenzen von sin. z und von cos. z als lineäre Functionen der Sinus und Cosinus von z, 2z, 3z, etc.... auszudrücken.

Auflösung. Diese Aufgabe ist überaus leicht aufzulösen, wenn man sich nur der bekannten Eigenschaften der gepaarten imaginären Ausdrücke

$$\cos. z + i\,.\,\sin. z,\quad \cos. z - i\,.\,\sin. z$$

erinnert. Bezeichnet man den ersten durch u, den zweiten durch v, so findet man

$$2\cos. z = u + v$$
$$2\sin. z\,.\,i = u - v.$$

Erhebt man beide Theile dieser Gleichungen auf die m^{te} Potenz; dividirt man sodann durch 2 oder durch 2i; reducirt man endlich mit Rücksicht auf die Formeln

$$uv = 1,$$

$$\frac{u^n + v^n}{2} = \cos. nz,\quad \frac{u^n - v^n}{2i} = \sin. nz,$$

wovon die beiden letztern für beliebige ganze Werthe von n gelten, so findet man für gerade Werthe von m

$$(15)\quad \begin{cases} 2^{m-1}.\cos. z^m = \cos. mz + \dfrac{m}{1}\cos.(\overline{m-2}.z) \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)}{1.2}\cos.(\overline{m-4}.z) + \text{etc.}\ldots. \\ \ldots\ldots + \dfrac{1}{2}\dfrac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots.\frac{m}{2}}, \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}}.2^{m-1}\sin. z^m = \cos. mz - \dfrac{m}{1}\cos.(\overline{m-2}.z) \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)}{1.2}\cos.(\overline{m-4}.z) - \text{etc.}\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \pm \dfrac{1}{2}\dfrac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{m}{2}}, \end{cases}$$

und für ungerade Werthe von m

$$(17)\quad \begin{cases} 2^{m-1}\cos. z^m = \cos. mz + \dfrac{m}{1}\cos.(\overline{m-2}.z) \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)}{1.2}\cos.(\overline{m-4}.z) + \text{etc.}\ldots. \\ \ldots\ldots + \dfrac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)}\cos. z \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{m-1}{2}}.2^{m-1}.\sin. z^m = \sin. mz - \dfrac{m}{1}\sin.(\overline{m-2}.z) \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)}{1.2}\sin.(\overline{m-4}.z) - \text{etc.}\ldots. \\ \ldots\ldots \pm \dfrac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)}\sin. z. \end{cases}$$

Zusatz 1. Setzt man in (15) successive

$$m = 2,\quad m = 4,\quad m = 6,\ \text{etc.}\ldots,$$

so erhält man

$$(19)\quad \begin{cases} 2\cos. z^2 = \cos. 2z + 1, \\ 8\cos. z^4 = \cos. 4z + 4\cos. 2z + 3, \\ 32\cos. z^6 = \cos. 6z + 6\cos. 4z + 15\cos. 2z + 10, \\ \text{etc.}\ldots. \end{cases}$$

Dieselben Gleichungen erhält man übrigens auch, wenn man die Werthe von

$$\cos. z^2,\ \cos. z^4,\ \cos. z^6,\ \text{etc.}\ldots.$$

als lineäre Functionen von

$$\cos. 2z;\ \cos. 4z,\ \cos. 6z,\ \text{etc.}\ldots$$

aus (13) successive herleitet.

Zusatz 2. Setzt man in (16) successive

$$m = 2,\quad m = 4,\quad m = 6,\ \text{etc.}\ldots,$$

so findet man

$$(20)\quad \begin{cases} -2\sin. z^2 = \cos. 2z - 1, \\ 8\sin. z^4 = \cos. 4z - 4\cos. 2z + 3, \\ -32\sin. z^6 = \cos. 6z - 6.\cos. 4z + 15\cos. 2z - 10, \\ \text{etc.}\ldots. \end{cases}$$

Diese Formeln könnte man auch aus (7) durch die Elimination von

$$\sin. z^2,\ \sin. z^4,\ \sin. z^6,\ \text{etc.}\ldots.$$

erhalten.

Zusatz 3. Setzt man in (17) successive

$$m = 1,\ m = 3,\ m = 5,\ \text{etc.}\ldots.$$

so wird

$$(21)\quad \begin{cases} \cos. z = \cos. z, \\ 4\cos. z^3 = \cos. 3z + 3\cos. z, \\ 16\cos. z^5 = \cos. 5z + 5\cos. 3z + 10\cos. z, \\ \text{etc.}\ldots. \end{cases}$$

Dieſelben Gleichungen können auch aus (14) hergeleitet werden.

Zuſatz 4. Setzt man in (18) ſucceſſive

$$m = 1,\ m = 3,\ m = 5,\ \text{etc.....},$$

ſo erhält man die Gleichungen

$$(22)\quad \begin{cases} \sin. z = \sin. z, \\ -4\sin. z^3 = \sin. 3z - 3\sin. z, \\ 16\sin. z^5 = \sin. 5z - 5\sin. 3z + 10\sin. z, \\ \text{etc.....} \end{cases}$$

welche auch aus (8) hergeleitet werden können.

Achtes Capitel.

Von den imaginären Veränderlichen und Functionen.

---

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die imaginären Veränderlichen und Functionen.

Gesetzt, die beiden reellen Größen u und v seien veränderlich, oder es gelte dies wenigstens von einer derselben, so ist

$$u + vi$$

eine imaginäre Veränderliche. Nähert sich überdies die Veränderliche u der Grenze U, und die Veränderliche v der Grenze V, so ist

$$U + Vi$$

die Grenze, welcher der imaginäre Ausdruck $u + vi$ sich nähert.

Hat man die in einer Function vorkommenden Constanten oder Veränderlichen zuvörderst als reelle Größen angesehen und betrachtet dieselben hierauf als imaginäre, so können die Bezeichnungen, vermittelst deren man die Function ausdrückte, nur dann in der Rechnung beibehalten werden, wenn man ihre Bedeutung für den vorliegenden Fall gehörig bestimmt hat. So z. B. bleibt nach dem, was in dem vorigen Capitel abgehandelt worden ist, über die Werthe von

$$a + x,\ a - x,\ ax,\ \frac{a}{x},$$

wenn die Constante a und die Veränderliche x imaginär werden, nicht der geringste Zweifel übrig. Bleibt z. B. die Constante a reell, während die Veränderliche x folgenden Werth hat

$$\alpha + \beta i = \varrho\,(\cos.\theta + i\,.\sin.\theta),$$

wo α, β, zwei reelle Größen bedeuten, ſtatt welcher auch der Modulus ϱ und der Bogen θ eingeführt werden können, ſo folgt aus Cap. 7., §§. 1. und 2., daß die Bezeichnungen

$$a+x,\ a-x,\ ax,\ \frac{a}{x}$$

folgenden vier imaginären Ausdrücken gleich ſind

$$a+\varrho\cos.\theta+\varrho\sin.\theta\,.\,i,\ a-\varrho\cos.\theta-\varrho\sin.\theta\,.\,i,$$

$$a\varrho\cos.\theta+a\varrho\cos.\theta\,.\,i,\ \frac{a}{\varrho}\cos.\theta-\frac{a}{\varrho}\sin.\theta\,.\,i,$$

oder auch folgenden

$$a+\alpha+\beta i,\ a-\alpha-\beta i,\ a\alpha+a\beta i,\ \frac{a\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{a\beta}{\alpha^2+\beta^2}\,.\,i.$$

Im Allgemeinen wird man vermittelſt der im vorhergehenden Capitel entwickelten Principien ſehr leicht die Werthe der algebraiſchen Ausdrücke beſtimmen können, in welchen mehrere Veränderliche oder Conſtanten durch die Zeichen der Addition, Subtraction, Multiplication oder Diviſion mit einander verbunden ſind, und man wird ſich ohne alle Mühe überzeugen, daß dieſe Ausdrücke alle Eigenſchaften behalten, welche ſie dann haben würden, wenn die darin vorkommenden Veränderlichen oder Conſtanten reell wären.

Bedeuten z. B.

$$x,\ y,\ z\ldots u,\ v,\ w,\ldots.$$

theils reelle, theils imaginäre Veränderliche, ſo iſt in allen möglichen Fällen

$$(1)\quad \begin{cases} x+y+z\ldots-(u+v+w\ldots)=x+y+z\ldots-u-v-w\ldots, \\ xy=yx, \\ u(x+y+z\ldots)=ux+uy+uz+\text{etc.}\ldots, \\ \dfrac{x+y+z+\text{etc.}\ldots}{u}=\dfrac{x}{u}+\dfrac{y}{u}+\dfrac{z}{u}+\text{etc.}\ldots, \\ \dfrac{x}{u}\cdot\dfrac{y}{v}\cdot\dfrac{z}{w}\ldots.=\dfrac{xyz\ldots}{uvw\ldots}, \\ \dfrac{x}{\left(\frac{u}{v}\right)}=\dfrac{vx}{u}=\dfrac{v}{u}\,.\,x, \\ \text{etc.}\ldots. \end{cases}$$

Wir wollen nun auch das Zeichen

$$x^a$$

betrachten, wo x allein einen imaginären Werth haben mag, weshalb wir setzen wollen

$$x = \alpha + \beta i = \varrho (\cos. \theta + i \sin. \theta).$$

Setzt man nun für a eine ganze Zahl m, so hat

$$x^a = x^{\pm m}$$

für beliebige reelle Werthe von α und β eine bestimmte Bedeutung. x^a drückt den imaginären Ausdruck

$$\varrho^m . \cos. m\theta + \varrho^m . i . \sin. m\theta$$

aus, wenn $a = +m$ ist; den Ausdruck

$$\varrho^{-m} . \cos. m\theta - \varrho^{-m} . i . \sin. \theta,$$

wenn $a = -m$ ist (s. Cap. 7. §. 2., Gleich. (18) und (19)). So oft aber a ein Bruch ist oder einen irrationalen Werth hat, ist der Werth von

$$x^a$$

kein bestimmter mehr, es sei denn, daß α, d. h. der reelle Theil des imaginären Ausdrucks x positiv ist. Setzt man in diesem Falle

$$\zeta = \text{arc. tang.} \frac{\beta}{\alpha},$$

wo ζ stets zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ liegt, und schreibt man x für $\alpha + \beta i$ in Cap. 7., §. 4., Gleich. (17) und (27), so findet man

$$x = \varrho (\cos. \zeta + i . \sin. \zeta),$$
$$x^a = \varrho^a [\cos. a\zeta + i . \sin. \alpha\zeta];$$

es ist also

$$x^a = \varrho^a (\cos. a\zeta + i . \sin. a\zeta).$$

Für einen gebrochenen Werth der Constante a hat

$$((x))^a$$

mehrere durch die Formeln

$((x))^a = x^a$ $((1))^a$ und $((1))^a = \cos. 2ka\pi \pm i . \sin. 2ka\pi$

zu bestimmende Werthe (s. Cap. 5., §§. 3. und 4.), wenn der reelle Theil von x (also α) positiv ist; dagegen werden diese verschiedenen Werthe von $((x))^a$ durch die Formeln

$$((x))^a = (-x)^a\ ((-1))^a$$

und $((-1))^a = \cos.(2k+1)a\pi \pm i\,.\,\sin.(2k+1)a\pi$

bestimmt, wenn α negativ ist (s. Cap. 7., §. 4., Gleich. (25) und (26)). Wenn a irrational ist, so kann das Zeichen $((x))^{\pm}$ nicht gebraucht werden.

Die Ausdrücke von der Form

$$x^a$$

behalten einerlei Eigenschaften, die Werthe der Veränderlichen mögen reell oder imaginär sein, so lange der Exponent eine ganze Zahl ist; im entgegengesetzten Falle finden diese Eigenschaften nur unter gewissen Bedingungen statt. Es seien z. B.

$$x = \alpha + \beta i,\ y = \alpha' + \beta' i,\ z = \alpha'' + \beta'' i,\ \text{etc....}$$

mehrere imaginäre Ausdrücke, welche sich auf reelle Größen reduciren werden, wenn β, β', β''... verschwinden. Es seien ferner a, b, c,... beliebige reelle gebrochene oder irrationale Größen; m, m′, m″... aber ganze Zahlen, so ist beständig (nach Cap. 7.)

$$(2)\begin{cases} x^m \,.\, x^{m'} \,.\, x^{m''} \,.... = x^{m+m'+m''...}, \\ x^{-m} \,.\, x^{-m'} \,.\, x^{-m''} ... = x^{-m-m'-m''...}, \\ x^{\pm m} \,.\, x^{\pm m'} \,.\, x^{\pm m''} ... = x^{\pm m \pm m' \pm m''...}, \end{cases}$$

(wo die Zahlen m, m′, m″... in beiden Theilen derselben Gleichung mit einem und demselben Zeichen behaftet sein müssen);

$$(3)\begin{cases} x^m \,.\, y^m \,.\, z^m ... = (x\,y\,z...)^m, \\ x^{-m} \,.\, y^{-m} \,.\, z^{-m} ... = (x\,y\,z...)^{-m}; \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} (x^m)^{m'} = (x^{-m})^{-m'} = x^{mm'}, \\ (x^m)^{-m'} = (x^{-m})^{m'} = x^{-mm'}. \end{cases}$$

Dagegen findet man, daß von den drei Formeln

$$(5) \qquad x^a\,x^b\,x^c .... = x^{a+b+c....},$$

$$(6) \qquad x^a\,y^a\,z^a .... = (x\,y\,z...)^a,$$

$$(7) \qquad (x^a)^b = x^{ab},$$

die erste nur dann gilt, wenn α, d. h. der reelle Theil von x positiv ist; die zweite, wenn die Größen α, α', α''... positiv sind, und die Summe

$$\text{arc. tang.}\frac{\beta}{\alpha} + \text{arc. tang.}\frac{\beta'}{\alpha'} + \text{arc. tang.}\frac{\beta''}{\alpha''} + \ldots$$

gleichzeitig zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ liegt; die dritte endlich, wenn α positiv ist, und zugleich das Product

$$a\,.\,\text{arc. tang.}\frac{\beta}{\alpha}$$

zwischen denselben Grenzen liegt.

Aus dem vorigen Capitel geht noch keineswegs hervor, auf welche Weise die Bedeutung von

A^x, Lx, $\sin. x$, $\cos. x$, $\text{arc. sin. } x$, $\text{arc. cos. } x$

bestimmt werden kann, wenn x imaginär wird. Da das leichteste Mittel, hiermit aufs Reine zu kommen, in der Betrachtung der imaginären Reihen besteht, so versparen wir diesen Theil der vorliegenden Untersuchung bis auf das neunte Capitel.

Nach dem bisher Gesagten darf auch ein algebraischer Ausdruck, welcher außer den reellen Veränderlichen x, y, z... noch imaginäre Constanten enthält, nur dann in den Calcul eingeführt werden, wenn er sich auf einen gewissen imaginären Ausdruck zurückführen läßt. Ein solcher Ausdruck, in welchem sowohl der reelle Theil, als auch der Coefficient von i nothwendig reelle Functionen der Veränderlichen x, y, z... sind, heißt eine imaginäre Function dieser Veränderlichen. Wenn z. B. $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ zwei reelle Functionen von x sind, so ist

$$\varphi(x) + \chi(x)\,.\,i$$

eine imaginäre Function dieser Veränderlichen. Wir werden öfters eine solche Function vermittelst eines einzigen charakteristischen Zeichens ϖ ausdrücken und also schreiben

$$\varpi x = \varphi(x) = \chi(x)\,.\,i.$$

Es ist also auch, wenn $\varphi(x, y, z\ldots)$, $\chi(x, y, z\ldots)$ zwei reelle Functionen der Veränderlichen x, y, z... sind,

$$\varpi(x, y, z\ldots) = \varphi(x, y, z\ldots) + i\,.\,\chi(x, y, z\ldots)$$

eine imaginäre Function derselben Veränderlichen.

Sind beide Functionen $\varphi(x, y, z\ldots)$, $\chi(x, y, z\ldots)$ algebraische, oder exponentielle, oder logarithmische, oder Kreis-

Functionen ꝛc.... und im ersten Falle rationale oder irrationale, ganze oder gebrochene Functionen ꝛc., so erhält die imaginäre Function $\varphi(x, y, z...) + i.\chi(x, y, z...)$ dieselbe Benennung. So ist z. B. die allgemeine Form einer imaginären und lineären Function von $x, y, z...$

$$(a + bx + cy + dz...) + i(a' + b'x + c'y + d'z...),$$

oder, was dasselbe ist,

$$a + a'.i + (b + b'.i)x + i(c + c'.i)y + (d + d'.i)z + etc...,$$

wo $a, b, c, d..., a', b', c', d'...$ reelle Constanten bedeuten.

Auch unter den imaginären Functionen sind die entwickelten, d. h. diejenigen, welche unmittelbar durch die Veränderlichen ausgedrückt werden, wohl zu unterscheiden von den verwickelten, deren aus gewissen Gleichungen herzuleitende Werthe nur durch Auflösung dieser Gleichungen gefunden werden können. Es sei

$$\varpi(x) \text{ oder } \varpi(x, y, z...)$$

eine verwickelte und durch eine einzige Gleichung bestimmte imaginäre Function; so wird man diese Function durch $u + i.v$ ausdrücken können, wo u und v zwei reelle Größen bedeuten. Setzt man nun in der imaginären Gleichung, welcher die Function Genüge leisten soll, $u + i.v$ für $\varpi(x)$ oder $\varpi(x, y, z...)$; entwickelt man sodann beide Theile der Gleichung, und setzt man endlich sowohl die reellen Größen in beiden Theilen, als auch die Coefficienten von i einander gleich, so erhält man zwei reelle Gleichungen zwischen den unbekannten Functionen u und v. Ist die Auflösung dieser Gleichungen möglich, so erhält man dadurch die entwickelten Werthe von u und v, mithin auch den entwickelten Werth der imaginären Function $u + i.v$.

Eine imaginäre Function ist nur dann völlig bestimmt, wenn man aus jedem Werthe der Veränderlichen den demselben correspondirenden Werth der Function herleiten kann. Oft entsprechen einem und demselben Werthe der Veränderlichen mehrere von einander verschiedene Werthe der Function. Unserer frühern Annahme gemäß werden wir diese vielfachen Werthe einer imaginären Function durch doppelte Parenthesen oder Zeichen andeuten. So bedeutet z. B.

$$\sqrt[n]{\cos. z + i . \sin. z}$$

oder

$$((\cos. z + i . \sin. z))^{\frac{1}{n}}$$

irgend eine von den n^{ten} Wurzeln aus dem imaginären Ausdrucke

$$\cos. z + i . \sin. z.$$

§. 2. Von den unendlich kleinen imaginären Ausdrücken und von der Stetigkeit der imaginären Functionen.

Ein veränderlicher imaginärer Ausdruck heißt **unendlich klein**, wenn er sich der Grenze Null nähert; was denn allerdings voraussetzt, daß der reelle Theil und der Coefficient von i sich gleichzeitig dieser Grenze nähern. Es sei

$$\alpha + \beta i = \varrho (\cos. \theta + i . \sin. \theta),$$

wo α und β zwei reelle Größen bedeuten, statt deren man auch den Modulus ϱ und den reellen Bogen θ in die Rechnung einführen kann. Soll dieser Ausdruck unendlich klein sein, so muß dieses auch bei dem Modulus

$$\varrho = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$$

der Fall sein.

Eine imaginäre Function von x heißt eine **stetige** zwischen zwei gegebenen Grenzen der Veränderlichen x, wenn zwischen diesen Grenzen einem unendlich kleinen Zuwachse der Veränderlichen auch stets ein unendlich kleiner Zuwachs der Function selbst entspricht. Hieraus folgt, daß

$$\varphi (x) + i . \chi (x)$$

zwischen zweien gegebenen Grenzen von x stetig sein wird, wenn dieses bei den reellen Functionen $\varphi (x)$ und $\chi (x)$ zwischen diesen Grenzen der Fall ist. Man sagt: „eine imaginäre Function der Veränderlichen x ist in der Nähe eines besonderen Werthes von x stetig, wenn sie es zwischen zwei einander noch so nahen Grenzen ist, zwischen welche der erwähnte Werth fällt."

Wenn endlich eine imaginäre Function von x in der Nähe eines besonderen Werthes dieser Veränderlichen stetig zu sein aufhört, so sagt man: „sie wird **discontinuirlich** (unter-

brochen), und es findet für diesen besonderen Werth eine Unterbrechung der Stetigkeit Statt."

Aus den gegebenen Erklärungen ersieht man sofort, daß die Lehrsätze 1., 2. und 3. des zweiten Cap., §. 2., auch dann gelten, wenn an die Stelle der reellen Functionen

$$f(x) \text{ und } f(x, y, z...)$$

imaginäre Functionen

$$\varphi(x) + i.\chi(x) \text{ und } \varphi(x, y, z...) + i.\chi(x, y, z...)$$

treten. Man kann demnach folgende Sätze aufstellen.

Lehrsatz 1. Wenn X, Y, Z.... die bestimmten und unveränderlichen Grenzen der reellen Veränderlichen x, y, z... sind, und wenn die imaginäre Function

$$\varphi(x, y, z...) + i.\chi(x, y, z...)$$

in Beziehung auf jede der Veränderlichen x, y, z... in der Nähe eines Systems von besonderen Werthen

$$x = X,\ y = Y,\ z = Z,\ \text{etc....}$$

stetig ist, so hat diese Function die Grenze

$$\varphi(X, Y, Z...) + i.\chi(X, Y, Z...);$$

oder setzt man der Kürze wegen

$$\varphi(x, y, z...) + i.\chi(x, y, z...) = \varpi(x, y, z...),$$

so ist $\varpi(X, Y, Z...)$ die Grenze von $\varpi(x, y, z...)$.

Lehrsatz 2. Es seien x, y, z... reelle Functionen der Veränderlichen t; sie seien in Beziehung auf diese Veränderliche in der Nähe des reellen Werthes $t = T$ stetig; es seien ferner X, Y, Z... die dem Werthe $t = T$ correspondirenden Werthe von x, y, z...; auch wollen wir annehmen, daß die imaginäre Function

$$\varpi(x, y, z...) = \varphi(x, y, z...) + i.\chi(x, y, z...)$$

zu gleicher Zeit in der Nähe dieser besonderen Werthe in Beziehung auf x, auf y, z... stetig sei, so muß $\varpi(x, y, z...)$ auch, als imaginäre Function von t betrachtet, in der Nähe des besonderen Werthes $t = T$ stetig sein.

Reduciren sich in dem vorstehenden Lehrsatze die Veränderlichen x, y, z... auf eine einzige, so erhält man folgenden Satz:

Lehrsatz 3. Es sei in dem Ausdrucke

$$\varpi(x) = \varphi(x) + i \cdot \chi(x)$$

die reelle Veränderliche x eine reelle Function einer anderen Veränderlichen t, und zwar in der Nähe des besonderen Werthes $t = T$ eine stetige Function von t; es sei ferner $\varpi(x)$ eine in der Nähe des, dem Werthe $t = T$ correspondirenden, Werthes $x = X$ stetige Function von x, so ist auch $\varpi(x)$, als Function von t betrachtet, in der Nähe des besonderen Werthes $t = T$ in Beziehung auf t stetig.

§. 3. Von den symmetrischen, alternirenden und homogenen imaginären Functionen.

Dehnt man die im dritten Cap. gegebenen Erklärungen auch auf die imaginären Functionen aus, so ersieht man sofort, daß

$$\varphi(x, y, z...) + i \cdot \chi(x, y, z...)$$

eine symmetrische, oder eine alternirende Function, oder eine homogene Function vom Grade a ist, wenn die reellen Functionen

$$\varphi(x, y, z...), \chi(x, y, z...)$$

beide symmetrisch, oder alternirend, oder homogene Functionen vom Grade a in Beziehung auf dieselben Veränderlichen sind.

§. 4. Von den imaginären ganzen Functionen von einer oder von mehreren Veränderlichen.

Nach §. 1. sind

$\varphi(x) + i \cdot \chi(x)$ und $\varphi(x, y, z...) + i \cdot \chi(x, y, z...)$

zwei imaginäre ganze Functionen, die eine von x, die andere von x, y, z..., wenn

$\varphi(x)$ und $\chi(x)$, $\varphi(x, y, z...)$ und $\chi(x, y, z...)$

reelle ganze Functionen derselben Veränderlichen sind. Wenn demnach $\varpi(x)$ eine imaginäre ganze Function von x bedeutet,

so wird ihr Werth durch eine Gleichung von folgender Form

$$\varpi x = \varphi(x) + \chi(x).i$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots).i$$

bestimmt werden, wo a_0, a_1, $a_2 \ldots$, b_0, b_1, $b_2 \ldots$ reelle Constanten bedeuten. Hieraus folgt, wenn man die Coefficienten einer und derselben Potenz von x zusammenfaßt,

(1) $\varpi(x) = (a_0 + b_0.i) + (a_1 + b_1.i)x + (a_2 + b_2.i)x^2 + \text{etc.}$.

Soll die Function $\varpi(x)$ für $x = 0$ verschwinden, so muß

$$a_0 + b_0.i = 0$$

sein, d. h. $a_0 = 0$ und $b_0 = 0$, wodurch sich der Werth von $\varpi(x)$ auf

$$\varpi(x) = (a_1 + b_1.i)x + (a_2 + b_2.i)x^2 + \text{etc.}...$$
$$= x(a_1 + b_1.i + (a_2 + b_2.i)x + \text{etc.}...)$$

reducirt. Mithin ist jede imaginäre ganze Function von x, welche mit x zugleich verschwindet, durch x theilbar. Geht man von dieser Bemerkung aus, so kann man ohne Mühe die Lehrsätze 1. und 2. (Cap. 4., §. 1.), auf den Fall ausdehnen, wo die dort erwähnten ganzen Functionen imaginär sind. Ich behaupte also, daß jene beiden Lehrsätze auch dann noch gelten, wenn statt der besonderen reellen Werthe von x, z. B. für

$$x_0, x_1, x_2, \text{etc.}...$$

imaginäre Werthe

$$\alpha_0 + \beta_0.i, \alpha_1 + \beta_1.i, \alpha_2 + \beta_2.i, \text{etc.}...$$

gesetzt werden.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung darzuthun, darf man nur folgende beide Sätze beweisen:

Lehrsatz 1. Wenn eine imaginäre ganze Function von x für irgend einen besondern Werth dieser Veränderlichen, z. B. für

$$x = \alpha_0 + \beta_0.i$$

verschwindet, so ist die Function durch

$$x - \alpha_0 - \beta_0.i$$

algebraisch theilbar.

Beweis. Es sei

$$\varpi(x) = \varphi(x) + \chi(x).i$$

die besagte Function. Setzt man darin

$$x = \alpha_0 + \beta_0.i + z,$$

wo z ebenfalls veränderlich ist, so erhält man offenbar als Resultat der Substitution dieses Werthes eine ganze und imaginäre Function von z, und zwar

$$\varpi(x) = \varpi(\alpha_0 + \beta_0 . i + z),$$

und da diese Function für $z = 0$ verschwinden muß, so ist sie durch $z = x - \alpha_0 - \beta_0 . i$ theilbar.

Zusatz 1. Vorstehender Satz gilt selbst dann noch, wenn $\chi(x)$ verschwindet, d. h., wenn $\varpi(x)$ sich auf eine reelle Function $\varphi(x)$ reducirt.

Zusatz 2. Der Lehrsatz gilt auch dann, wenn $\beta = 0$ ist; mithin auch, wenn x reell ist.

Lehrsatz 2. Wenn eine imaginäre und ganze Function von x für jeden besonderen Werth dieser Größe, welcher in der Reihe

$$\alpha_0 + \beta_0 i,\ a_1 + \beta_1 i,\ \alpha_2 + \beta_2 i, \ldots,\ \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} . i$$

vorkommt, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, verschwindet, so ist diese Function dem Producte einer andern imaginären und ganzen Function von x und der Factoren

$$x - \alpha_0 - \beta_0 i,\ x - \alpha_1 - \beta_1 i,\ x - \alpha_2 - \beta_2 i, \ldots,$$
$$x - \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} . i$$

gleich.

Beweis. Es sei

$$\varpi(x) = \varphi(x) + \chi(x) . i$$

die vorgelegte Function. Da sie für

$$x = \alpha_0 + \beta_0 i$$

verschwindet, so muß sie nach Lehrs. 1. durch

$$x - \alpha_0 - \beta_0 i$$

algebraisch theilbar sein; folglich ist

$$(2) \qquad \varpi(x) = (x - \alpha_0 - \beta_0 i) Q_0,$$

wo Q gleichfalls eine imaginäre und ganze Function von x bedeutet. Da nun die Function Q_0 ebenfalls verschwindet, wenn

$$x = \alpha_1 + \beta_1 i$$

gesetzt wird, so muß nothwendig einer der beiden Factoren des zweiten Theiles von (2) Null werden (s. Cap. 7., §. 2., Lehrs. 7., Zus. 2.). Da aber der erste Factor

$$x - \alpha_0 - \beta_0 i$$

nicht für

$$x = \alpha_1 + \beta_1 i$$

Null werden kann, so lange die Werthe

$$\alpha_0 + \beta_0 i,\ \alpha_1 + \beta_1 i$$

von einander verschieden sind, so ist es klar, daß für den zweiten Werth die Function Q_0 sich auf Null reduciren, und daß diese Function durch

$$x - \alpha_1 - \beta_1 i$$

algebraisch theilbar sein muß.

Es ist folglich

$$Q_0 = (x - \alpha_1 - \beta_1 i)\ Q_1,$$

wo Q_1 gleichfalls eine imaginäre ganze Function von x ist. Mithin kann die Gleichung (2) unter die Form

(3) $\varpi(x) = (x - \alpha_0 - \beta_0 i)(x - \alpha_1 - \beta_1 i)\ Q_1$

gebracht werden. Fährt man fort auf diese Weise zu schließen, so findet man: 1) daß nur der Factor Q_1 sich für

$$x = \alpha_2 + \beta_2 i$$

auf Null reduciren kann, wenn die Factoren

$$\alpha_0 + \beta_0 i,\ \alpha_1 + \beta_1 i,\ \alpha_2 + \beta_2 i$$

von einander verschieden sind; 2) daß Q_1, da es für $x = \alpha_2 + \beta_2 i$ verschwindet, durch

$$x - \alpha_2 + \beta_2 i$$

algebraisch theilbar sein muß. Folglich ist

$$Q_1 = (x - \alpha_2 - \beta_2 i)\, Q_2,$$

mithin auch

(4) $\varpi(x) = (x - \alpha_0 - \beta_0 i)(x - \alpha_1 - \beta_1 i)(x - \alpha_2 - \beta_2 i)\, Q_2,$

wo Q_2 abermals eine imaginäre und ganze Function von x ist. So findet man endlich auch, daß, wenn $\varpi(x)$ für n verschiedene Werthe von x, welche wir durch

$$\alpha_0 + \beta_0 i,\ \alpha_1 + \beta_1 i,\ \alpha_2 + \beta_2 i,\ \ldots,\ \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \cdot i$$

bezeichnen wollen, verschwindet, man nothwendig auch haben muß:

(5) $$\begin{cases} \varpi(x) = (x - \alpha_0 - \beta_0 i)(x - \alpha_1 - \beta_1 i)(x - \alpha_2 - \beta_2 i)(\ldots) \\ \ldots \times (x - \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} \cdot i)\, Q, \end{cases}$$

wo Q eine ganze imaginäre Function von x bedeutet. Es ist beinahe überflüssig, zu bemerken, daß unser Lehrsatz auch dann noch gilt, wenn

$$\chi(x) = 0,$$

oder wenn

$$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0, \ldots, \beta_{n-1} = 0$$

ist, d. h., wenn $\varpi(x)$ oder die besonderen Werthe von x reell sind.

Mit Hülfe der in diesem §. aufgestellten Principien läßt sich ohne alle Mühe darthun, daß die Lehrsätze (3) und (4) und die Formel (1) in Cap. 4., §. 1., auch auf den Fall ausgedehnt werden können, wo die Functionen und die Veränderlichen imaginär werden, so wie auch die besonderen Werthe, welche man für diese oder für jene setzt. Eben so kann man beweisen, daß die Sätze 1., 2., 3., in Cap. 4., §. 2., und die Formeln (2), (3), (4), (5), (6) in §. 3. desselben Cap. unabhängig von allen besondern reellen oder imaginären Werthen der Functionen oder der Constanten gelten. So z. B. gilt die Gleichung (6) des §. 3., nämlich

$$\frac{(x+y)^n}{1.2.3....n} = \frac{x^n}{1.2.3...n} + \frac{x^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} \cdot \frac{y}{1} + \ldots.$$

$$+ \frac{x}{1} \cdot \frac{y^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} + \frac{y^n}{1.2.3...n},$$

auch für beliebige imaginäre Werthe von x und y.

§. 5. Bestimmung stetiger imaginärer Functionen einer einzigen Veränderlichen, welche gewissen Bedingungen Genüge leisten sollen.

Es sei

$$\varpi(x) = \varphi(x) + i\,\chi(x)$$

eine stetige imaginäre Function von x, wo $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ zwei stetige, aber reelle Functionen bedeuten. Die imaginäre Function $\varpi(x)$ wird völlig bestimmt sein, wenn sie für alle möglichen Werthe von x und y einer der beiden Gleichungen

(1) $\varpi(x+y) = \varpi(x) + \varpi(y)$

(2) $\varpi(x+y) = \varpi(x) \cdot \varpi(y)$

Genüge leistet; desgleichen, wenn dies in Beziehung auf eine der Gleichungen

$$(3) \qquad \varpi(xy) = \varpi(x) + \varpi(y)$$

$$(4) \qquad \varpi(xy) = \varpi(x) \,.\, \varpi(y)$$

der Fall ist. Wir wollen diese vier Gleichungen der Reihe nach auflösen, wodurch wir vier Aufgaben erhalten, welche denen sehr ähnlich sind, die wir Cap. 5., §. 1. behandelt haben.

Aufgabe 1. Eine imaginäre Function $\varpi(x)$ so zu bestimmen, daß sie zwischen zweien beliebigen reellen Grenzen von x stetig ist, und daß die Gleichung

$$(1) \qquad \varpi(x+y) = \varpi(x) + \varpi(y)$$

für alle reellen Werthe von x und y gilt.

Auflösung. Setzt man in (1)

$$\varpi(x) = \varphi(x) + i\,\chi(x),$$

so verwandelt sich diese Gleichung in

$$\varphi(x+y)+i\,.\,\chi(x+y) = \varphi(x)+i\chi(x)+\varphi(y)+i\chi(y).$$

Setzt man alles Reelle in beiden Theilen und außerdem die Coefficienten von i einander gleich, so findet man

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$$

$$\chi(x+y) = \chi(x)+\chi(y).$$

Aus diesen Formeln erhält man nach Cap. 5., §. 1., Aufg. 1.

$$\varphi(x) = x\varphi(1),$$

$$\chi(x) = x\chi(1);$$

mithin

$$(5) \qquad \varpi(x) = x\,[\varphi(1)+i\chi\,.\,(1)],$$

oder, was dasselbe ist,

$$(6) \qquad \varpi(x) = x\,.\,\varpi(1).$$

Aus (5) ergibt sich, daß jeder Werth von $\varpi(x)$, welcher der vorliegenden Aufgabe entsprechen soll, nothwendig von der Form

$$(7) \qquad \varpi(x) = (a+bi)x$$

sein muß, wo a und b Constanten sind. Es ist übrigens leicht einzusehen, daß ein Werth von dieser Form, unabhängig von jedem besonderen Werthe von a und b der Gleichung (1) Genüge leistet. Diese Größen sind demnach willkürliche Con-

stanten. — Es verdient noch bemerkt zu werden, daß man den eben gefundenen Werth von $\varpi(x)$ erhält, wenn man in Cap. 5., §. 1., Gleich. (7) die willkürliche, aber imaginäre Constante

$$a + b.i$$

für a setzt.

Aufgabe 2. Die imaginäre Function $\varpi(x)$ so zu bestimmen, daß sie zwischen zweien beliebigen reellen Grenzen von x stetig ist, und daß die Gleichung

$$(2) \qquad \varpi(x+y) = \varpi(x).\varpi(y)$$

für alle reellen Werthe von x und y gilt.

Auflösung. Setzt man in (2) $x = 0$, so erhält man

$$\varpi(0) = 1,$$

oder, was dasselbe ist, da $\varpi(x) = \varphi(x) + i\,\chi(x)$ ist,

$$\varphi(0) + i\,\chi(0) = 1;$$

mithin

$$\varphi(0) = 1,\ \chi(0) = 0.$$

Die Formel $\varphi(x)$ reducirt sich also für $x = 0$ auf 1, und da sie stetig sein soll zwischen beliebigen Grenzen, so muß sie es auch in der Nähe eines besonderen Werthes sein, welcher von der Einheit sehr wenig verschieden und also positiv ist. Man kann demnach, wenn α eine sehr kleine Zahl bedeutet, diese Zahl dergestalt wählen, daß $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen

$$x = 0,\ x = \alpha$$

beständig positiv bleibt. Ist diese Bedingung erfüllt, und setzt man

$$\varrho = \sqrt{[(\varphi(\alpha))^2 + (\chi(\alpha))^2]},\ \zeta = \text{arc. tang.}\ \frac{\chi(\alpha)}{\varphi(\alpha)},$$

so erhält man

$$\varpi(\alpha) = \varphi(\alpha) + i\,\chi(\alpha) = \varrho(\cos.\zeta + i \sin.\zeta).$$

Setzt man in (2) successive $y + z$ für y; $z + u$ für z, &c...., so findet man

$$\varpi(x+y+z\ldots) = \varpi(x).\varpi(y).\varpi(z)\ldots,$$

wie groß auch immer die Anzahl der Veränderlichen x, y, z... sein mag. Setzt man ferner diese Anzahl gleich m, und

$$x = y = z = \text{etc.} \ldots = \alpha,$$

so verwandelt sich die so eben gefundene Gleichung in

$$\varpi(m\alpha) = [\varpi(\alpha)]^m = \varrho^m [\cos. m\zeta + i \sin. m\zeta].$$

Ich behaupte aber, daß diese Formel auch dann noch gilt, wenn für m ein Bruch, oder eine beliebige Zahl μ gesetzt wird, und beweise dies folgendergestalt:

Setzt man in (2), $x = \frac{1}{2}\alpha$, $y = \frac{1}{2}\alpha$, so erhält man

$$\left[\varpi\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right]^2 = \varpi(\alpha) = \varrho(\cos. \zeta + i \sin. \zeta);$$

zieht man ferner auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Quadratwurzel aus, welche so genommen werden muß, daß die reellen Theile positiv werden, indem $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = \alpha$, cos. x dagegen zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = \zeta$ positiv bleibt, so findet man

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\alpha\right) + i\chi\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \varrho^{\frac{1}{2}}\left(\cos. \frac{\zeta}{2} + i \sin. \frac{\zeta}{2}\right).$$

Setzt man aber in (2), $x = \frac{1}{4}\alpha$, $y = \frac{1}{4}\alpha$, so ergibt sich

$$\left[\varpi\left(\frac{1}{4}\alpha\right)\right]^2 = \varpi\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \varrho^{\frac{1}{2}}\left[\cos. \frac{\zeta}{2} + i \sin. \frac{\zeta}{2}\right],$$

und zieht man die Quadratwurzel aus, welche man so zu nehmen hat, daß die reellen Theile positiv sind,

$$\varpi\left(\frac{1}{4}\alpha\right) = \varrho^{\frac{1}{4}}\left[\cos. \frac{\zeta}{4} + i \sin. \frac{\zeta}{4}\right].$$

Durch ein ähnliches Raisonnement erhält man successive die Formeln

$$\varpi\left(\frac{1}{8}\alpha\right) = \varrho^{\frac{1}{8}}\left[\cos. \frac{\zeta}{8} + i \sin. \frac{\zeta}{8}\right],$$

$$\varpi\left(\frac{1}{16}\alpha\right) = \varrho^{\frac{1}{16}}\left[\cos. \frac{\zeta}{16} + i \sin. \frac{\zeta}{16}\right],$$

etc. . . . .

und allgemein, wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$\varpi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right) = \varrho^{\frac{1}{2^n}}\left[\cos. \frac{\zeta}{2^n} + i \sin. \frac{\zeta}{2^n}\right].$$

Leitet man aus $\varpi\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right)$ auf dieselbe Weise den Werth von $\varpi\left(\frac{m}{2^n}.\alpha\right)$ ab, wie wir den Werth von $\varpi(m\alpha)$ aus $\varpi(\alpha)$ hergeleitet haben, so findet man

$$\varpi\left(\frac{m}{2^n}.\alpha\right)=\varrho^{\frac{m}{2^n}}\left[\cos.\left(\frac{m}{2^n}.\zeta\right)+i\sin.\left(\frac{m}{2^n}.\zeta\right)\right],$$

oder, was dasselbe ist,

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right)+i\,\chi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right)$$

$$=\varrho^{\frac{m}{2^n}}\left[\cos.\left(\frac{m}{2^n}.\zeta\right)+i\sin.\left(\frac{m}{2^n}.\zeta\right)\right];$$

mithin auch

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right)=\varrho^{\frac{m}{2^n}}.\cos.\left(\frac{m}{2^n}.\zeta\right),$$

$$\chi\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right)=\varrho^{\frac{m}{2^n}}.\sin.\left(\frac{m}{2^n}.\zeta\right).$$

Gesetzt nun, der Bruch $\frac{m}{2^n}$ nähere sich beständig der Zahl μ, so ist, wenn man bei dieser Grenze stehen bleibt,

$$\varphi(\mu\alpha)=\varrho^{\mu}.\cos.\mu\zeta,\ \chi(\mu\alpha)=\varrho^{\mu}.\sin.\mu\zeta,$$

woraus denn folgt:

$$(8)\qquad \varpi(\mu\alpha)=\varrho\,[\cos.\mu\zeta+i\sin.\mu\zeta].$$

Setzt man ferner in (2), $x=\mu\alpha$, $y=-\mu\alpha$, so erhält man

$$\varpi(-\mu\alpha)=\frac{\varpi(0)}{\varpi(\mu\alpha)}=\varrho^{-\mu}\,[\cos.(-\mu\zeta)+i\sin.(-\mu\zeta)].$$

Die Formel (8) wird also auch selbst dann gelten, wenn man für μ, $-\mu$ setzt; d. h., für beliebige reelle Werthe von x ist

$$(9)\quad \varpi(\alpha x)=\varrho^{x}\,[\cos.\zeta x+i\sin.\zeta x]=[\varpi(\alpha)]^{x}.$$

Substituirt man in (9) $\frac{x}{\alpha}$ für x, so verwandelt sich die Formel in

$$(10)\quad \varpi(x)=\varrho^{\frac{x}{\alpha}}\left[\cos.\left(\frac{\zeta}{\alpha}.x\right)+i\sin.\left(\frac{\zeta}{\alpha}.x\right)\right]=[\varpi(\alpha)]^{\frac{x}{\alpha}},$$

und setzt man der Kürze wegen

$$(11) \qquad \varrho^{\frac{1}{\alpha}} = A, \quad \frac{\zeta}{\alpha} = b,$$

so erhält man

$$(12) \qquad \varpi(x) = A^x(\cos. bx + i \sin. bx),$$

wo A und b zwei reelle Constanten bezeichnen, von welchen die erste positiv sein muß. Man kann sich übrigens leicht davon überzeugen, daß jeder Werth von derselben Form der Gleichung (2) Genüge leistet, ganz unabhängig von jedem besonderen Werthe der Größen A und b. Diese Größen sind also willkürliche Constanten.

Zusatz. Soll $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ positiv bleiben, so kann man, anstatt α unendlich klein zu nehmen, $\alpha = 1$ setzen, und man erhält sodann unmittelbar aus (9) und (10)

$$(13) \qquad \varpi(x) = [\varpi(1)]^x.$$

Aufgabe 3. Eine imaginäre Function $\varpi(x)$ so zu bestimmen, daß sie zwischen zweien beliebigen positiven Grenzen von x stetig ist, und daß die Gleichung

$$(3) \qquad \varpi(xy) = \varpi(x) + \varpi(y)$$

für alle positiven Werthe von x und y gilt.

Auflösung. Setzt man in (3)

$$\varpi(x) = \varphi(x) + i\chi(x)$$

so erhält man

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y),$$
$$\chi(xy) = \chi(x) + \chi(y).$$

Bedeutet ferner A eine beliebige Zahl, und L das Zeichen der Logarithmen desjenigen Systems, dessen Grundzahl A ist, so folgt aus den zuletzt gefundenen Gleichungen nach Cap. 5., §. 1., Aufg. 3.,

$$\varphi(x) = \varphi(A).L(x),$$
$$\chi(x) = \chi(A).L(x),$$

und hieraus

$$(14) \qquad \varpi(x) = [\varphi(A) + i\chi(A)].L(x),$$

oder, was dasselbe ist,

$$(15) \qquad \varpi(x) = \varpi(A).L(x).$$

Jeder Werth von $\varpi(x)$, welcher der vorliegenden Aufgabe entsprechen soll, muß also von der Form

(16) $$\varpi(x) = (a+bi).L(x)$$

sein, wo a und b offenbar willkürliche Constanten sind; indem der eben gefundene Werth von $\varpi(x)$ unabhängig von jedem besonderen Werthe dieser beiden Constanten der Gleichung (3) Genüge leistet. Es verdient noch bemerkt zu werden, daß sich die Gleichung (12), Cap. 5., §. 1. in die so eben gefunden verwandelt, wenn man dort für die willkürliche, aber reelle Constante a die willkürliche aber imaginäre Constante $a+bi$ setzt.

Anmerkung. Man kann zu der Gleichung (15) auch auf folgende sehr einfache Weise gelangen.

Da $x = A^{Lx}$, $y = A^{Ly}$ ist, so reducirt sich die Gleichung (3) auf

$$\varpi\left(A^{Lx+Ly}\right) = \varpi\left(A^{Lx}\right) + \varpi\left(A^{Ly}\right);$$

da aber in dieser Gleichung Lx und Ly alle möglichen positiven und negativen Werthe haben können, so ist für alle möglichen reellen Werthe von x und y

$$\varpi\left(A^{x+y}\right) = \varpi\left(A^{x}\right) + \varpi\left(A^{y}\right);$$

mithin auch nach Aufg. 1., Gleich. (6)

$$\varpi\left(A^{x}\right) = x.\varpi(A^{1}) = x\varpi(A),$$

also auch

$$\varpi\left(A^{Lx}\right) = \varpi(A).Lx,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\varpi(x) = \varpi(A).Lx.$$

Aufgabe 4. Eine imaginäre Function $\varpi(x)$ so zu bestimmen, daß sie zwischen zweien beliebigen positiven Grenzen von x stetig ist, und daß die Gleichung

(4) $$\varpi(xy) = \varpi(x).\varpi(y)$$

für alle positiven Werthe von x und y gilt.

Auflösung. Es wäre leicht, die vorliegende Aufgabe auf eine ähnliche Weise zu lösen wie die vorige; man gelangt

aber leichter zum Ziele, wenn man erwägt, daß die Gleichung (4) sich unter folgende Form bringen läßt:

$$\varpi(A^{Lx+Ly}) = \varpi(A^{Lx}) + \varpi(A^{Ly}).$$

Da aber diese Gleichung für alle möglichen positiven und negativen Werthe von Lx und Ly gilt, so ist für alle möglichen reellen Werthe von x und y

$$\varpi(A^{x+y}) = \varpi(A^{x}) \cdot \varpi(A^{y}).$$

Bedeutet nun α eine sehr kleine Zahl, so erhält man, wenn man in Gleich. (10), Aufg. 2., $\varpi(x) = \varpi(A^x)$ setzt,

$$\varpi(A^x) = [\varpi(A^\alpha)]^{\frac{x}{\alpha}},$$

mithin auch

$$\varpi(A^{Lx}) = [\varpi(A^\alpha)]^{\frac{Lx}{\alpha}},$$

oder, was dasselbe ist,

$$(17) \qquad \varpi(x) = [\varpi(A^\alpha)]^{\frac{Lx}{\alpha}}.$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß $\varpi(A^x)$, folglich der reelle Theil dieses Ausdrucks, sich für $x = 1$ auf die Einheit reducirt. Dies läßt sich aber auch direct zeigen, wenn man in (4)

$$x = A^0 = 1$$

setzt.

Was die Zahl α anbelangt, so muß dieselbe so klein sein, daß der reelle Theil von $\varpi(A^x)$ zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = \alpha$, beständig positiv bleibt. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist auch der reelle Theil des imaginären Ausdrucks

$$\varpi(A^\alpha) = \varphi(A^\alpha) + i\,\chi(A^\alpha)$$

positiv. Setzt man also

$$\varrho = \sqrt{\left\{[\varphi(A^\alpha)]^2 + [\chi(A^\alpha)]^2\right\}}, \quad \zeta = \text{arc. tang.} \frac{\chi(A^\alpha)}{\varphi(A^\alpha)}$$

so ist

$$\varpi(A^\alpha) = \varrho(\cos.\zeta + i \sin.\zeta);$$

folglich verwandelt sich die Gleichung (17) in

$$(18)\quad \begin{cases} \varpi(x) = \varrho^{\frac{Lx}{\alpha}} \cdot \left[\cos.\left(\frac{\zeta}{\alpha} \cdot Lx\right) + i \sin.\left(\frac{\zeta}{\alpha} \cdot Lx\right)\right] \\ \quad = x^{\frac{L\varrho}{\alpha}} \left[\cos.\left(\frac{\zeta}{\alpha} \cdot Lx\right) + i \sin.\left(\frac{\zeta}{\alpha} \cdot Lx\right)\right]. \end{cases}$$

Jeder Werth von $\varpi(x)$, welcher der vorliegenden Aufgabe entsprechen soll, muß also durchaus von der Form

$$(19)\quad \varpi(x) = x^a \left[\cos.(bLx) + i \sin.(bLx)\right]$$

sein, wo a und b offenbar willkürliche Constanten sind.

Neuntes Capitel.

Von den convergirenden und divergirenden imaginären Reihen. Summirung einiger convergirenden imaginären Reihen. Bezeichnungen einiger imaginären Functionen, welche man durch Summirung eben dieser Reihen erhält.

---

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die imaginären Reihen.

Es seien

(1) $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$, etc. ...,

(2) $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$, etc. ...,

zwei reelle Reihen, so werden die Größen

(3) $p_0+iq_0, p_1+iq_1, p_2+iq_2, \ldots, p_n+iq_n$, etc. ...

eine sogenannte imaginäre Reihe bilden.

Es sei ferner

$$(4)\quad \begin{cases} s_n=(p_0+iq_0)+(p_1+iq_1)+(p_2+iq_2)+\ldots \\ \ldots+(p_{n-1}+iq_{n-1}) \\ \quad =(p_0+p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}) \\ \quad +i(q_0+q_1+q_2+\ldots+q_{n-1}) \end{cases}$$

die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe. Nähert sich nun bei zunehmenden Werthen von n, s_n einer bestimmten Grenze, so ist die Reihe (3) convergirend, und diese Grenze

ist dann ihre Summe; im entgegengesetzten Falle divergirt die Reihe und hat keine Summe. Der erste Fall tritt offenbar dann ein, wenn die beiden Summen

$$p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1},$$
$$q_0 + q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1}$$

selbst convergiren; der entgegengesetzte Fall dagegen, wenn sie nicht convergiren; mit andern Worten, die Reihe (3) wird stets zugleich mit (1) und (2) convergiren oder divergiren. Sind die beiden letztern oder auch nur eine von ihnen divergirend, so ist es die Reihe (3) gleichfalls. In allen nur möglichen Fällen heißt dasjenige Glied der Reihe (3), dessen Index n ist, also das Glied

$$p_n + i q_n,$$

ihr allgemeines Glied.

Eine der einfachsten imaginären Reihen ist diejenige, welche man erhält, wenn man der Größe x in der geometrischen Progression

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \text{etc.} \ldots$$

einen imaginären Werth gibt.

Setzt man z. B.

$$x = z(\cos.\theta + i \sin.\theta),$$

wo z eine reelle Veränderliche bedeutet, θ dagegen einen reellen Bogen, so verwandelt sich die erwähnte geometrische Progression in

$$(5)\quad \begin{cases} 1,\ z(\cos.\theta + i\sin.\theta),\ z^2(\cos.2\theta + i\sin.2\theta), \ldots. \\ \ldots,\ z^n(\cos.n\theta + i\sin.n\theta),\ \text{etc}\ldots \end{cases}$$

Um die Gleichung zu finden, durch welche man die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe erhält, darf man nur in der Formel

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

$x = z(\cos.\theta + i\sin.\theta)$ setzen. Man erhält alsdann

$$(6)\quad \begin{cases} 1 + z(\cos.\theta + i\sin.\theta) + z^2(\cos.2\theta + i\sin.2\theta) + \ldots. \\ \ldots + z^{n-1}(\cos.(n-1)\theta + i\sin.(n-1)\theta) \\ = \dfrac{1}{1 - z(\cos.\theta + i\sin.\theta)} - \dfrac{z^n(\cos.n\theta + i\sin.n\theta)}{1 - z(\cos.\theta + i\sin.\theta)}; \end{cases}$$

und da der Modulus des imaginären Ausdrucks

$$\frac{z^n\,(\cos.\,n\theta + i\,\sin.\,n\theta)}{1 - z\,\cos.\,\theta - i\,\sin.\,\theta},$$

nämlich

$$\frac{\pm z^n}{(1 - 2z\,\cos.\,\theta + z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

sich entweder der Grenze 0 nähert, wenn n zunimmt, oder unendlich groß wird, je nachdem $z \lessgtr 1$ ist, so folgt aus (6), daß die Reihe (5) im ersten Falle eine convergirende Reihe ist, deren Summe

$$\frac{1}{1 - z\,\cos.\,\theta - i\,z\,\sin.\,\theta}$$

ist; im zweiten Falle aber eine divergirende Reihe, für welche es keine Summe gibt.

Die Summe einer convergirenden imaginären Reihe wird eben so angedeutet, wie die einer reellen, nämlich durch die Summe ihrer ersten Glieder und ein etc. . . . .

Ist also die Reihe (3) convergirend, und s ihre Summe, und wird in (4) $n = \infty$, so findet man

$$(7)\quad \begin{cases} s = (p_0 + iq_0) + (p_1 + iq_1) + (p_2 + iq_2) + \text{etc.} \ldots \\ = (p_0 + p_1 + p_2 + \text{etc.}\ldots) + i(q_0 + q_1 + q_2 + \text{etc.}\ldots) \end{cases}$$

Wenn in der Gleichung (6) $z < 1$ und $n = \infty$ ist, so erhält man

$$(8)\quad \begin{cases} 1 + z\,(\cos.\,\theta + i\sin.\,\theta) + z^2\,(\cos.\,2\theta + i\,\sin.\,2\theta) + \text{etc.}. \\ = \dfrac{1}{1 - z\,\cos.\,\theta - i\sin.\,\theta} = \dfrac{1 - z\,\cos.\,\theta + i\,z\sin.\,\theta}{1 - 2z\,\cos.\,\theta + z^2}. \end{cases}$$

Der erste Theil dieser Gleichung läßt sich unter die Form $(1 + z\,\cos.\theta + z^2\cos.2\theta + \text{etc.}.) + (z\,\sin.\theta + z^2\sin.2\theta + \text{etc.}.)i$ bringen. Man hat mithin, wenn $z < 1$ ist,

$$(9)\quad \begin{cases} (1 + z\,\cos.\,\theta + z^2\cos.\,2\theta + \text{etc.}\ldots) + (z\,\sin.\,\theta + z^2\,\sin.\,2\theta + \text{etc.}\ldots)i \\ = \dfrac{1 - z\,\cos.\,\theta}{1 - 2z\,\cos.\,\theta + z^2} + \dfrac{z\,\sin.\,\theta}{1 - 2z\,\cos.\,\theta + z^2}\,.\,i. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$(10)\begin{cases} 1+z\cos.\theta+z^2\cos.2\theta+\text{etc...}=\dfrac{1-z\cos.\theta}{1-2z\cos.\theta+z^2} \\ z\sin.\theta+z^2\sin.2\theta+z^3\sin.3\theta+\text{etc...}=\dfrac{z\sin.\theta}{1-2z\cos.\theta+z^2} \end{cases} \begin{cases} z=-1 \\ z=+1 \end{cases}.$$

Die Substitution eines imaginären Werthes für x führt demnach bei der geometrischen Progression

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ \text{etc.}\ldots.$$

auf die Summirung der beiden Reihen

$$(11)\begin{cases} 1,\ z\cos.\theta,\ z^2\cos.2\theta,\ \ldots,\ z^n\cos.n\theta,\ \text{etc.}\ldots, \\ z\sin.\theta,\ z^2\sin.2\theta,\ \ldots,\ z^n\sin.n\theta,\ \text{etc.}\ldots, \end{cases}$$

vorausgesetzt, daß z zwischen den Grenzen

$$z=-1,\ z=+1$$

liegt, d. h., vorausgesetzt, daß die beiden Reihen convergiren. Die ersten Theile der Gleichungen (10) sind nach Cap. 6. §. 1., Lehrs. 1., in der Nähe eines jeden zwischen den Grenzen $z=-1$, $z=+1$ liegenden Werthes von z stetig, mithin ist es auch der erste Theil von (9) in der Nähe eines solchen Werthes. Dieser erste Theil von (9) ist aber nichts anderes, als die Summe der Reihe (5).

Verallgemeinert man die so eben gemachten Betrachtungen, so erhält man folgenden Satz.

Lehrsatz 1. Sind die verschiedenen Glieder der Reihe (3), in der Nähe eines besonderen Werthes von z, für welchen die Reihe convergirt, stetige Functionen von z, so ist die Summe der Reihe s, in der Nähe desselben Werthes, ebenfalls eine stetige Function von z.

Beweis. Die Reihe (3) kann in der That nur dann in der Nähe eines besonderen Werthes von z convergiren, und ihre Glieder können nur dann in dessen Nähe stetige Funtionen von z sein, wenn dieses bei den reellen Reihen (1) und (2) der Fall ist. Da aber in diesem Falle eine jede der beiden Summen

$$p_0+p_1+p_2,+\text{etc.}\ldots.$$
$$q_0+q_1+q_2,+\text{etc.}\ldots.$$

nach Cap. 6., §. 1., Lehrs. 1. eine stetige Function von z ist, so muß die Summe der Reihe (3), oder

$$s = (p_0 + p_1 + p_2 + \text{etc.}\ldots) + (q_0 + q_1 + q_2 + \text{etc.}\ldots)\,i$$

gleichfalls eine stetige Function von z sein.

Gesetz nun, es seien

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \text{etc.}\ldots$$

die Moduli der verschiedenen Glieder der Reihe (3), und

$$\cos.\theta_0 + i\sin.\theta_0,\ \cos.\theta_1 + i\sin.\theta_1,\ \cos.\theta_2 + i\sin.\theta_2,\ \text{etc..}$$

die denselben entsprechenden reducirten Ausdrücke, so daß die Gleichungen

$$\varrho_n = (p_n^2 + q_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$p_n + i\,q_n = \varrho_n\,(\cos.\theta_n + i\sin.\theta_n)$$

allgemein gelten, so verwandelt sich die Reihe (3) in

$$(12)\quad \begin{cases} \varrho_0\,(\cos.\theta_0 + i\sin.\theta_0),\ \varrho_1\,(\cos.\theta_1 + i\sin.\theta_1), \\ \varrho_2\,(\cos.\theta_2 + i\sin.\theta_2),\ldots,\ \varrho_n(\cos.\theta_n + i\sin.\theta_n)\ \text{etc..} \end{cases}$$

Ob diese Reihe convergirt oder divergirt, darüber kann man gemeinhin nach Anleitung des folgenden Lehrsatzes entscheiden.

Lehrsatz 2. Man suche die Grenze, oder aber die Grenzen, welchen sich der Ausdruck $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ nähert, wenn n beständig wächst. Je nachdem die größte dieser Grenzen kleiner oder größer als die Einheit ist, wird auch die Reihe (3) convergiren oder divergiren.

Beweis. Wir wollen zuvörderst den Fall untersuchen, wo die größten Werthe von $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ sich einer Grenze nähern, welche kleiner als die Einheit ist, wenn n beständig zunimmt. Da in diesem Falle die Reihe

$$(13)\qquad \varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ldots,\ \varrho_n,\ \text{etc.}\ldots$$

nach Cap. 6., §. 2., Lehrs. 1. convergirt, so muß dieses auch bei den Reihen

$$(14)\quad \begin{cases} \varrho_0\cos.\theta_0,\ \varrho_1\cos.\theta_1,\ \varrho_2\cos.\theta_2,\ldots,\ \varrho_n\cos.\theta_n,\ \text{etc...} \\ \varrho_0\sin.\theta_0,\ \varrho_1\sin.\theta_1,\ \varrho_2\sin.\theta_2,\ldots,\ \varrho_n\sin.\theta_n,\ \text{etc...} \end{cases}$$

stattfinden (Cap. 6., §. 3, Lehrs. 4.), woraus denn folgt, daß

auch die Reihe (12), d. h. die unter eine andere Form gebrachte Reihe (3) convergirt.

Gesetzt aber, die größten Werthe von $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ nähern sich einer Grenze, welche größer als die Einheit ist, wenn n beständig zunimmt, so läßt sich durch ein Raisonnement, welches demjenigen ähnlich ist, dessen wir uns Cap. 6., §. 2., Lehrs. 1. bedient haben, sehr leicht zeigen, daß der größte Werth des Modulus

$$\varrho_n = (p_n^2 + q_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

mit n zugleich unendlich groß wird, was nur dann möglich ist, wenn p_n und q_n, oder doch wenigstens eine von beiden Größen, unendlich groß wird. Da aber diese beiden Größen die allgemeinen Glieder der Reihen (1) und (2) sind, so wird in dem vorliegenden Falle wenigstens eine von beiden Reihen, mithin auch die Reihe (3), divergiren.

Anmerkung 1. Der so eben aufgestellte Lehrsatz läßt nur dann einen Zweifel über die Convergenz oder Divergenz einer imaginären Reihe übrig, wenn die Grenze der größten Werthe von $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ der Einheit gleich ist. Jederzeit indessen kann man behaupten, daß, wenn die Reihe (13) convergirt, dieses auch bei (14), also auch bei (12), der Fall ist. Das Umgekehrte gilt aber keinesweges; denn es kann der Fall eintreten, daß (12) convergirt, während (13) divergirt. Setzt man z. B.

$$\varrho_n = \frac{1}{n+1}, \quad \theta_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

so erhält man, an Stelle der Reihen (12) und (13), die beiden folgenden

$$i, -\frac{1}{2}i, +\frac{1}{3}i, -\frac{1}{4}i, \text{ etc.} \ldots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \text{ etc.} \ldots,$$

von welchen die erste convergirt, während die zweite divergirt. Die Summe der ersten ist

$$i\,l\,(2),$$

wo l das Zeichen der Neper'schen Logarithmen ist.

Anmerkung 2. Nähert sich der Quotient

$$\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$$

einer bestimmten Grenze, wenn n beständig zunimmt, so nähert sich der größte Werth von $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$ gleichfalls dieser Grenze.

Der 5te Lehrsatz des §. 3., Cap. 6. läßt sich offenbar ebensowohl auf imaginäre, als auf reelle Reihen anwenden. Was den 6ten Lehrsatz anbetrifft, so tritt, wenn von imaginären Reihen die Rede ist, folgender Satz an dessen Stelle.

Lehrsatz 3. Es seien

$$(15)\quad \begin{cases} u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \text{ etc.}\ldots, \\ v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \text{ etc.}\ldots, \end{cases}$$

zwei convergirende, aber imaginäre Reihen, deren respective Summen s und s' sein mögen. Wenn nun diese Reihen convergirend bleiben, sobald man ihre verschiedenen Glieder auf ihre respectiven Moduli reducirt, so ist die Reihe

$$(16)\quad \begin{cases} u_0v_0, u_0v_1 + u_1v_0, u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0, \ldots \\ \ldots u_nv_0 + u_{n-1}v_1 + \ldots + u_1v_{n-1} + u_0v_n, \text{ etc.}\ldots \end{cases}$$

gleichfalls eine convergirende imaginäre Reihe, deren Summe ss' ist.

Beweis. Es seien s_n und s'_n respective die Summen der n ersten Glieder der beiden Reihen (15); s''_n dagegen die Summe der ersten Glieder der Reihe (16), so findet man

$$s_n s'_n - s''_n = u_{n-1}v_{n-1} + (u_{n-1}v_{n-2} + u_{n-2}v_{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \ldots + u_2v_{n-2} + u_1v_{n-1}).$$

Es seien ferner ϱ_n und ϱ'_n die Moduli der imaginären Ausdrücke u_n und v_n, so daß also diese Ausdrücke durch Gleichungen von der Form

$$u_n = \varrho_n (\cos.\theta_n + i \sin.\theta_n)$$
$$v_n = \varrho'_n (\cos.\theta'_n + i \sin.\theta'_n)$$

gegeben sind, so muß, da die reellen Reihen

$$\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \text{ etc.} \ldots$$
$$\varrho'_0, \varrho'_1, \varrho'_2, \ldots, \varrho'_n, \text{ etc.} \ldots$$

convergiren (per hypothesin) nach Cap. 6., §. 3., Lehrs. 6. die Summe

$$\varrho_{n-1}\varrho'_{n-1} + (\varrho_{n-1}\varrho'_{n-2} + \varrho_{n-2}\varrho'_{n-1}) + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + (\varrho_{n-1}\varrho'_1 + \varrho_{n-2}\varrho'_2 + \ldots + \varrho_2\varrho'_{n-2} + \varrho_1\varrho'_{n-1})$$

sich der Grenze Null nähern, wenn n beständig zunimmt; um so mehr muß dieses also bei den Summen

$$\varrho_{n-1}\varrho'_{n-1}\cos.(\theta_{n-1} + \theta'_{n-1})$$
$$+[\varrho_{n-1}\varrho'_{n-2}\cos.(\theta_{n-1}+\theta'_{n-2}) + \varrho_{n-2}\varrho'_{n-1}\cos.(\theta_{n-2}+\theta'_{n-1})]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+[\varrho_{n-1}\varrho'_1\cos.(\theta_{n-1}+\theta'_1) + \varrho_{n-2}\varrho'_2\cos.(\theta_{n-2}+\theta'_2) + \ldots$$
$$\ldots + \varrho_2\varrho'_{n-2}\cos.(\theta_2+\theta_{n-2}) + \varrho_1\varrho'_{n-1}\cos.(\theta_1+\theta'_{n-1})],$$

und

$$\varrho_{n-1}\varrho'_{n-1}\sin.(\theta_{n-1} + \theta'_{n-1})$$
$$+[\varrho_{n-1}\varrho'_{n-2}\sin.(\theta_{n-1}+\theta'_{n-2}) + \varrho_{n-2}\varrho'_{n-1}\sin.(\theta_{n-2}+\theta'_{n-1})]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+[\varrho_{n-1}\varrho'_1\sin.(\theta_{n-1}+\theta'_1) + \varrho_{n-2}\varrho'_2\sin.(\theta_{n-2}+\theta_2) + \ldots$$
$$\ldots + \varrho_2\varrho'_{n-2}\sin.(\theta_2+\theta'_{n-2}) + \varrho_1\varrho_{n-1}\sin.(\theta_1+\theta'_{n-1})]$$

der Fall sein, von welchen die erste offenbar der reelle Theil des imaginären Ausdrucks

$$s_n s'_n - s''_n,$$

die zweite hingegen der Coefficient von i in diesem Ausdrucke ist. $s_n s'_n - s''_n$ wird demnach sich ebenfalls der Grenze Null nähern, wenn n beständig wächst, und da $s_n s'_n$ in diesem Falle sich der Grenze ss' nähert, so wird dies auch bei s''_n der Fall sein; woraus denn folgt, 1) daß die Reihe (16) convergirt und 2) daß ihre Summe ss' ist.

§. 2. Von den imaginären Reihen, welche nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen einer Veränderlichen geordnet sind.

Es sei x eine imaginäre Veränderliche; so wird jede nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von x geordnete Reihe von der Form

$$a_0 + b_0 i,\ (a_1 + b_1 i)\, x,\ (a_2 + b_2 i)\, x^2, \ldots$$
$$\ldots,\ (a_n + b_n i)\, x^n,\ \text{etc.} \ldots$$

sein, wo a_0, a_1, a_2, ..., a_n, etc....; b_0, b_1, b_2, ..., b_n, etc.... Constanten sind. Wenn b_0, b_1, b_2, etc..., verschwinden, so reducirt sich die vorgelegte Reihe auf

$$(1) \qquad a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2, \ldots, a_n x^n,\ \text{etc.} \ldots$$

Wir wollen in diesem Paragraphen zuvörderst die Reihen dieser Art betrachten. — Setzt man, größerer Bequemlichkeit wegen,

$$(2) \qquad x = z\ (\cos.\theta + i \sin.\theta),$$

wo z eine reelle Veränderliche, und θ einen reellen Bogen bedeutet, so verwandelt sich die Reihe (1) in

$$(3) \begin{cases} a_0,\ a_1 z\,(\cos.\theta + i \sin.\theta),\ a_2 z^2\,(\cos.2\theta + i \sin.2\theta), \ldots \\ \ldots a_n z^n\,(\cos.n\theta + i \sin.n\theta),\ \text{etc.} \ldots \end{cases}$$

Es sei nun, wie Cap. 6., §. 4., A die größte unter den Grenzen, welchen sich $\sqrt[n]{(a_n)}$ nähert, wenn n beständig wächst; so wird die größte unter den Grenzen, welchen sich in diesem Falle die n^{te} Wurzel aus dem Modulus des imaginären Ausdrucks

$$a_n x^n = a_n z^n\,(\cos.n\theta + i \sin.n\theta)$$

nähert, dem Producte

$$Az$$

gleich sein; mithin wird (s. §. 1., Lehrs. 2.) die Reihe (3) convergiren oder divergiren, je nachdem der Zahlenwerth von Az kleiner oder größer als die Einheit ist. Aus dieser Betrachtung ergibt sich unmittelbar folgender Satz.

Lehrsatz 1. Die Reihe (3) convergirt für alle Werthe von z, welche zwischen den Grenzen

$$z = -\frac{1}{A},\ z = +\frac{1}{A}$$

liegen, und divergirt für alle Werthe von z, welche über diese Grenze hinausfallen; mit andern Worten: die Reihe (1) convergirt oder divergirt, je nachdem der Modulus des imaginären Ausdrucks x kleiner oder größer als $\frac{1}{A}$ ist.

Anmerkung. Nähert sich der Zahlenwerth von $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ einer bestimmten Grenze, wenn n beständig wächst, so ist diese Grenze genau der positiven Größe gleich, welche wir durch A bezeichnet haben.

Zusatz 1. Vergleicht man den vorliegenden Lehrsatz mit Cap. 6., §. 4., Lehrs. 1., so sieht man, daß, wenn die Reihe (1) für irgend einen reellen Werth von x convergirt, sie auch für jeden imaginären Werth convergiren muß, dessen Modulus, abgesehen vom Zeichen, diesem reellen Werthe von x gleich ist. Demnach convergirt die Reihe (1) für beliebige imaginäre Werthe von x, wenn sie für alle reellen Werthe dieser Veränderlichen convergirt.

Zusatz 2. Um für Lehrs. 1. und Zus. 1. ein Beispiel zu geben, wollen wir die vier Reihen

$$(4)\quad 1,\ x,\ x^2,\ldots,\ x^n,\ \text{etc.}\ldots,$$

$$(5)\quad 1,\ \frac{\mu}{1}x,\ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2,\ldots,\ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n,\ \text{etc.}.,$$

$$(6)\quad 1,\ \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1.2},\ldots,\ \frac{x^n}{1.2.3\ldots n},\ \text{etc.}\ldots,$$

$$(7)\quad x,\ -\frac{x^2}{2},\ \ldots\ \pm\frac{x^n}{n},\ \text{etc.}\ldots$$

betrachten, wo μ in der zweiten eine beliebige Größe bedeutet. Die beiden ersten unter diesen vier Reihen, so wie auch die letzte, convergiren für alle reellen Werthe von x, welche zwischen den Grenzen $x=-1$, $x=+1$ liegen; die dritte hingegen convergirt für beliebige reelle Werthe von x. Setzt man nun aber

$$x = z\,(\cos.\,\theta + i\,\sin.\,\theta),$$

so verwandeln sich jene Reihen in folgende:

$$(8)\quad \begin{cases} 1,\ z\,(\cos.\,\theta + i\sin.\,\theta),\ z^2\,(\cos.\,2\theta + i\,\sin.\,2\theta),\ldots \\ \ldots\ z^n\,(\cos.\,n\theta + i\,\sin.\,n\theta),\ \text{etc.}\ldots, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} 1,\ \frac{\mu}{1}z\,(\cos.\,\theta+i\sin.\,\theta),\ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}z^2\,(\cos.\,2\theta+i\sin.\,2\theta),\ldots \\ \ldots,\ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}\,z^n\,(\cos.\,n\theta+i\,\sin.\,n\theta),\ \text{etc.}\ldots, \end{cases}$$

$$(10)\begin{cases} 1, \dfrac{z(\cos.\theta + i\sin.\theta)}{1}, \dfrac{z^2(\cos.2\theta + i\sin.2\theta)}{1.2}, \ldots \\ \ldots \dfrac{z^n(\cos.n\theta + i\sin.n\theta)}{1.2.3\ldots n}, \text{ etc.}\ldots, \end{cases}$$

$$(11)\begin{cases} \dfrac{z(\cos.\theta + i\sin.\theta)}{1}, -\dfrac{z^2(\cos.2\theta + i\sin.2\theta)}{2}, \ldots \\ \ldots, \pm\dfrac{z^n(\cos.n\theta + i\sin.n\theta)}{n}, \text{ etc.}\ldots, \end{cases}$$

von welchen die beiden ersten und die letzte für alle zwischen $z = -1$, $z = +1$ liegenden Werthe von z convergiren; die vorletzte hingegen convergirt für beliebige reelle Werthe von z.

Nachdem wir die Grenzen bestimmt haben, zwischen welchen z liegen muß, wenn die Reihe (3) convergiren soll, glauben wir noch darauf aufmerksam machen zu müssen, daß, nach den im vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Principien, die Lehrsätze 3, 4 und 5 in Cap. 6., §. 4. auch auf den Fall ausgedehnt werden können, wo x imaginär wird. Man wird in Lehrs. 4. nur annehmen dürfen, daß die Reihen a_0, a_1x, a_2x^2, etc.... b_0, b_1x, b_2x^2, etc.... convergirend bleiben, wenn ihre Glieder nicht auf ihre Zahlenwerthe, sondern auf ihre respectiven Moduli reducirt werden. Setzt man demnach

$$x = z(\cos.\theta + i\sin.\theta)$$

und verwandelt sich durch diese Substitution der zweite Theil der Gleichung (15) in Cap. 6., §. 4., in $\varpi(\mu)$; oder mit andern Worten: setzt man

$$(12)\begin{cases} \varpi(\mu) = 1 + \dfrac{\mu}{1} z(\cos.\theta + i\sin.\theta), \\ \qquad + \dfrac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2(\cos.2\theta + i\sin.2\theta) + \text{etc.}\ldots, \end{cases}$$

so findet man, anstatt der Formel (16) in Cap. 6., §. 4., folgende

$$(13) \qquad \varpi(\mu).\varpi(\mu') = \varpi(\mu+\mu').$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß die so eben gefundene Formel nur für diejenigen Werthe von z, welche zwischen den Gren-

zen $z = -1$, $z = +1$ liegen, gilt, und daß zwischen diesen Grenzen die imaginäre Function $\varpi(\mu)$, d. h., die Summe der Reihe (9) sowohl in Beziehung auf z, als in Beziehung auf μ stetig ist (s. oben §. 1., Lehrs. 1.).

Betrachtet man statt (9) die allgemeinere Reihe (3), und läßt man in dieser den Werth von z immerfort unmerklich wachsen, so wird die Summe dieser Reihe eine stetige imaginäre Function von z sein, so lange z zwischen den Grenzen

$$-\frac{1}{A}, +\frac{1}{A}$$

liegt. Es sei $\varpi(z)$ diese stetige Function, so ist, nach der bereits früher eingeführten Bezeichnung

$$(14)\begin{cases}\varpi(z) = a_0 + a_1 z(\cos.\theta + i\sin.\theta) \\ \quad + a_2 z^2(\cos.2\theta + i\sin.2\theta) + \text{etc.....}\end{cases}\quad\begin{cases}z = -\frac{1}{A}\\ z = +\frac{1}{A}\end{cases}$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß diese Gleichung zwei reelle Gleichungen enthält. Setzt man nämlich

$$(15)\qquad \varpi(z) = \varphi(z) + i\chi(z),$$

wo $\varphi(z)$ und $\chi(z)$ reelle Functionen sind, so zerfällt (14) in

$$(16)\begin{cases}\varphi(z) = a_0 + a_1 z\cos.\theta + a_2 z^2\cos.2\theta + \text{etc...} \\ \chi(z) = a_1 z\sin.\theta + a_2 z^2\sin.2\theta + \text{etc.....}\end{cases}\quad\begin{cases}z = -\frac{1}{A}\\ z = +\frac{1}{A}\end{cases}$$

Ist die Reihe (3) gegeben, so kann man zuweilen aus ihr die Function $\varpi(z)$ unter einer endlichen Form ableiten, und das heißt die Reihe summiren. Wir haben diese Aufgabe schon einmal für die Reihe (8) in §. 1. gelöst. Gegenwärtig wollen wir sie in Bezug auf die Reihen (9), (10), (11) zu lösen suchen und demgemäß folgende drei Aufgaben der Reihe nach behandeln.

Aufgabe 1. Die Summe der Reihe

$$(9)\begin{cases}1, \frac{\mu}{1}z(\cos.\theta + i\sin.\theta), \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}z^2(\cos.2\theta + i\sin.2\theta), \\ \text{etc.....}\end{cases}$$

zu finden, wenn z zwischen den Grenzen $z = -1$, $z = +1$ liegt.

Auflösung. Es sei $\varpi(\mu)$ die gesuchte Summe. Ist nun μ' eine reelle, aber von μ verschiedene Größe, so findet man

$$\varpi(\mu) \cdot \varpi(\mu') = \varpi(\mu + \mu'). \tag{13}$$

Da diese Gleichung mit der Gleichung (2) in Cap. 8., §. 5. übereinstimmt, so kann sie auch auf dieselbe Weise aufgelöst werden, und man findet

$$\varpi(\mu) = r^{\mu}[\cos. \mu t + i \sin. \mu t],$$

wo der Modulus r und der Bogen t in Beziehung auf μ constant sind, aber nothwendigerweise von z und θ abhängen. Es ist demnach zwischen den Grenzen $z = -1$, $z = +1$

$$\left.\begin{aligned} & 1 + \frac{\mu}{1} z(\cos. \theta + i \sin. \theta) \\ & + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} . z^2(\cos. 2\theta + i \sin. 2\theta) + \text{etc}... \\ & = r^{\mu}(\cos. \mu t + i \sin. \mu t). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Um die unbekannten Werthe von r und t zu bestimmen, darf man nur in (17) $\mu = 1$ setzen, so erhält man

$$1 + z \cos. \theta + i z \sin. \theta = r \cos. t + i r \sin. t,$$

oder, was dasselbe ist,

$$1 + z \cos. \theta = r \cos. t$$
$$z \sin. \theta = r \sin. t,$$

und hieraus

$$r = (1 + 2z \cos. \theta + z^2)^{\frac{1}{2}};$$

ferner, wenn man erwägt, daß $\cos. t = \frac{1 + z \cos. \theta}{r}$ für $z < 1$ immer positiv ist, und wenn k eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$t = \text{arc. tang.} \frac{z \sin. \theta}{1 + z \cos. \theta} \pm 2k\pi.$$

Setzt man hierauf

$$s = \text{arc. tang.} \frac{z \sin. \theta}{1 + z \cos. \theta}, \tag{18}$$

so verwandelt sich die Gleichung (17) in

$$(19)\begin{cases} 1+\frac{\mu}{1}z(\cos.\theta+i\sin.\theta)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}z^2(\cos.2\theta+i\sin.2\theta) \\ +\text{etc}.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \begin{cases} z=-1 \\ z=+1 \end{cases} \\ =(1+2z\cos.\theta+z^2)^{\frac{\mu}{2}}[\cos.\mu t+i\sin.\mu t], \end{cases}$$

wo t durch die Formel

$$(20) \qquad t = s \pm 2k\pi$$

gegeben ist, in welcher die ganze Zahl k nur von z und θ abhängen kann.

Es ist wohl zu merken, daß der erste Theil der Gleichung (19) zwischen den Grenzen $z=-1$, $z=+1$ eine stetige Function von z ist, unabhängig von jedem besonderen Werthe von μ. Der zweite Theil der Gleichung wird demnach dieselbe Eigenschaft haben, oder mit andern Worten: die Größen

$$(1+2z\cos.\theta+z^2)^{\frac{\mu}{2}}\cos.\mu t,$$

$$(1+2z\cos.\theta+z^2)^{\frac{\mu}{2}}\sin.\mu t,$$

mithin auch

$$\cos.\mu t,\ \sin.\mu t,$$

müssen für alle möglichen Werthe von μ unmerklich zu- oder abnehmen, wenn dieses bei z der Fall ist. Nun aber kann diese Bedingung nur dann erfüllt werden, wenn t zugleich mit z unmerklich zu- oder abnimmt. Denn gesetzt, es entspräche einem unendlich kleinen Incremente von z ein endliches von t, so daß t in $t+a$ überginge, wo a eine endliche Größe bedeutet, so könnten die Cosinus und Sinus der Bogen

$$\mu t,\ \mu(t+a)$$

nur dann unmerklich verschieden sein, wenn μa sehr nahe ein Vielfaches der Peripherie wäre, was nur für besondere Werthe von μ, nicht aber für beliebige endliche Werthe dieses Coefficienten gilt. Der Bogen $t = s \pm 2k\pi$ ist mithin eine stetige Function von z. Da ferner nur die Größe s, welche durch die Gleichung (18) gegeben ist, mit z zugleich zwischen den Grenzen $z=-1$, $z=+1$ continuirlich zu- und ab-

nimmt, während die ganze Zahl k sich nur um eine endliche Anzahl von Einheiten verändern darf, so ist es klar, daß, wenn t die Bedingung der Stetigkeit erfüllen soll, nur s allein sich verändern darf, k hingegen constant sein muß. Diese Größe ist also von z unabhängig, und um ihren Werth zu finden, darf man nur $z = 0$ setzen. Da in diesem Falle $s = 0$, $t = \pm 2k\pi$ ist, so erhält man aus (19)

$$1 = \cos.(2k\mu\pi) \pm i \sin.(2k\mu\pi)$$

unabhängig von μ; demnach ist

$$k = 0.$$

Die Formel (20) gibt also allgemein

$$t = s,$$

und die Gleichung (19) wird sich auf

$$(21)\begin{cases} 1+\frac{\mu}{1}z(\cos.\theta+i\sin.\theta)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}z^2(\cos.2\theta+i\sin.2\theta) \\ + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} z=-1 \\ z=+1 \end{cases} \\ =(1+2z\cos.\theta+z^2)^{\frac{\mu}{2}}(\cos.\mu s+i\sin.\mu s) \end{cases}$$

reduciren. Nimmt man ferner Rücksicht auf die Formel (27) des Cap. 7., §. 4., so erkennt man leicht, daß der zweite Theil der Gleichung (21) unter die Form

$$[1+z(\cos.\theta+i\sin.\theta)]^{\mu}$$

gebracht werden kann. Liegt daher z zwischen den Grenzen -1 und $+1$, so ist

$$(22)\begin{cases} 1+\frac{\mu}{1}z(\cos.\theta+i\sin.\theta)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}z^2(\cos.2\theta+i\sin.2\theta) \\ + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} z=-1 \\ z=+1 \end{cases} \\ =[1+z(\cos.\theta+i\sin.\theta)]^{\mu}; \end{cases}$$

mit andern Worten: die Gleichung (20) des Cap. 7., §. 4., nämlich

$$1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\text{etc.}\ldots=(1+x)^{\mu},$$

gilt auch dann, wenn man

$$x = z\,(\cos.\theta + i \sin.\theta)$$

setzt, wo $z < 1$ ist, also nicht blos, wenn x reell ist und zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegt.

Zusatz 1. Die Formel (21) zerfällt, so wie alle imaginären Gleichungen in zwei reelle Gleichungen, welche man erhält, wenn man sowohl die reellen Theile, als auch die Coefficienten von i auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich setzt. Auf diese Weise findet man

$$(23)\quad \begin{cases} 1 + \frac{\mu}{1} z \cos.\theta + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2 \cos. 2\theta + \text{etc.}\ldots \\ = (1 + 2z \cos.\theta + z^2)^{\frac{\mu}{2}} . \cos. \mu s, \\ \frac{\mu}{1} z \sin.\theta + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} z^2 \sin. 2\theta + \text{etc.}\ldots \left\{\begin{matrix} z = -1 \\ z = +1 \end{matrix}\right\} \\ = (1 + 2z \cos.\theta + z^2)^{\frac{\mu}{2}} . \sin. \mu s, \end{cases}$$

wo s durch die Gleichung (18) gegeben ist.

Zusatz 2. Setzt man in (22) und (23) $\mu = -1$ und $-z$ für z, so erhält man die Gleichungen (8) und (10) des §. 1.

Zusatz 3. Ist $\theta = \frac{\pi}{2}$, oder, was dasselbe ist,

$$\cos.\theta = 0, \quad \sin.\theta = 1,$$

so gibt die Formel (18)

$$s = \text{arc. tang. } z,$$

welcher Bogen beständig zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{4}$, $+\frac{\pi}{4}$ liegen wird, wenn $z < 1$ ist. In diesem Falle hat man offenbar

$$z = \text{tang. } s = \frac{\sin. s}{\cos. s},$$

$$(1 + 2z \cos.\theta + z^2)^{\frac{\mu}{2}} = (\text{sec. } s)^{\mu} = \frac{1}{(\cos. s)^{\mu}},$$

und man erhält aus den Gleichungen (23), aber bloß für Werthe von s, welche zwischen den erwähnten Grenzen liegen,

$$(24)\quad \begin{cases} \cos.\mu s = \cos.s^{\mu} - \dfrac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos.s^{\mu-2}\sin.s^2 \\ + \dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3.4}\cos.s^{\mu-4}\sin.s^4 - \text{etc...} \end{cases} \left\{ \begin{matrix} s = -\frac{\pi}{4} \\ s = +\frac{\pi}{4} \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{cases} \sin.\mu s = \dfrac{\mu}{1}\cos.s^{\mu-1}\sin.s \\ - \dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\cos.s^{\mu-3}\sin.s^3 + \text{etc..} \end{cases} \left\{ \begin{matrix} s = -\frac{\pi}{2} \\ s = +\frac{\pi}{2} \end{matrix} \right\}$$

Setzt man demnach in der Formel (12) des Cap. 7., §. 2., statt der ganzen Zahl m, eine beliebige Größe μ, so werden diese Formeln, welche für alle reellen ganzen Werthe des Bogens z gelten, so verallgemeinert nur Bogen gelten, welche kleiner als $\frac{\pi}{4}$ sind.

Aufgabe 2. Die Summe der Reihe

$$(10)\quad 1, \frac{z}{1}(\cos.\theta + i\sin.\theta), \frac{z^2}{1.2}(\cos.2\theta + i\sin.2\theta), \text{etc...}$$

für beliebige Werthe von z zu finden.

Auflösung. Setzt man in den Gleichungen (18) und (21) αz für z und $\frac{1}{\alpha}$ für μ, wo α zuvörderst ein unendlich Kleines bedeuten mag, so findet man für alle Werthe von αz, welche zwischen den Grenzen -1, $+1$ liegen, d. h. für alle Werthe von z, welche zwischen den Grenzen

$$-\frac{1}{\alpha}, +\frac{1}{\alpha}$$

liegen,

$$(25)\begin{cases} 1+\frac{z}{1}(\cos.\theta+i\sin.\theta)+\frac{z^2}{1.2}(\cos.2\theta+i\sin.2\theta)(1-\alpha) \\ +\frac{z^3}{1.2.3}(\cos.3\theta+i\sin.3\theta)(1-\alpha)(1-2\alpha) \\ +\text{ etc. .....}, \quad \left\{\begin{matrix} z=-\frac{1}{\alpha} \\ z=+\frac{1}{\alpha} \end{matrix}\right\} \\ =(1+2\alpha z\cos.\theta+\alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}.\left(\cos.\frac{s}{\alpha}+i\sin.\frac{s}{\alpha}\right), \end{cases}$$

wo s durch die Formel

$$(26) \qquad s = \text{arc. tang.}\ \frac{\alpha z\sin.\theta}{1+\alpha z\cos.\theta}$$

gegeben iſt.

Setzt man nun in (25) $\alpha = 0$, ſo findet man

$$(27)\begin{cases} 1+\frac{z}{1}(\cos.\theta+i\sin.\theta)+\frac{z^2}{1.2}(\cos.2\theta+i\sin.2\theta) \\ +\frac{z^3}{1.2.3}(\cos.3\theta+i\sin.3\theta)+\text{etc....}, \quad \left\{\begin{matrix} z=-\infty \\ z=+\infty \end{matrix}\right\} \\ =\lim.\left[(1+2\alpha z\cos.\theta+\alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}.\left(\cos.\frac{s}{\alpha}+i\sin.\frac{s}{\alpha}\right)\right] \end{cases}$$

Es bleibt alſo nur noch übrig, die Grenze des Productes

$$(1+2\alpha z\cos.\theta+\alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}.\left(\cos.\frac{s}{\alpha}+i\sin.\frac{s}{\alpha}\right),$$

oder die Grenzen der beiden Größen

$$(1+2\alpha z\cos.\theta+\alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}} \text{ und } \frac{s}{\alpha}$$

zu ſuchen. — Setzt man nun

$$2\alpha z\cos.\theta+\alpha^2 z^2=\beta,$$

ſo iſt

$$(1+2\alpha z\cos.\theta+\alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}=(1+\beta)^{\frac{z\cos.\theta+\frac{\alpha z^2}{2}}{\beta}},$$

mithin

$$\lim.\,(1+2\alpha z\cos.\theta+\alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}$$

$$=\left[\lim.\,(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\lim.\left(z\cos.\theta+\frac{\alpha z^2}{2}\right)}$$

$$=e^{z\cos.\theta.}$$

Da ferner s in (26) unendlich klein wird, so ist

$$\lim.\frac{s}{\text{tang. s}}=\lim.\left[\frac{1}{\left(\frac{\sin. s}{s}\right)}.\cos.s\right]=1,$$

und da man aus (26) erhält

$$\frac{\text{tang. s}}{\alpha}=\frac{z\sin.\theta}{1+\alpha z\cos.\theta},\text{ so ist}$$

$$\lim.\frac{s}{\alpha}=\lim.\left[\frac{s}{\text{tang.}}\cdot\frac{z\sin.\theta}{1+\alpha z\cos.\theta}\right]=z\sin.\theta.$$

Es ist also klar: daß die Grenze des zweiten Theiles von (25)

$$e^{z\cos.\theta}\left[\cos.(z\sin.\theta)+i\sin.(z\sin.\theta)\right]$$

sein muß, und daß sich die Formel (27) in

$$(28)\begin{cases}1+\frac{z}{1}(\cos.\theta+i\sin.\theta)+\frac{z^2}{1.2}(\cos.2\theta+i\sin.2\theta)\\ +\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \begin{cases}z=-\infty\\ z=+\infty\end{cases}\\ =e^{z\cos.\theta}\left[\cos.(z\sin.\theta)+i\sin.(z\sin.\theta)\right]\end{cases}$$

verwandelt, wo der reelle Werth von z willkürlich ist, da er zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ liegt.

Zusatz 1. Vergleicht man die beiden Theile der Gleichung (28), und setzt man 1) die reellen Theile, 2) die Coefficienten von i auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich, so erhält man die beiden reellen Gleichungen

$$(29)\begin{cases} 1+z\cos.\theta+\dfrac{z^2}{1.2}\cos.2\theta+\text{etc.}\ldots \\ =e^{z\cos.\theta}.\cos.(z\sin.\theta), & \left\{\begin{matrix} z=-\infty \\ z=+\infty \end{matrix}\right\} \\ \dfrac{z}{1}\sin.\theta+\dfrac{z^2}{1.2}\sin.2\theta+\text{etc.}\ldots\ldots \\ =e^{z\cos.\theta}.\sin.(z\sin.\theta). \end{cases}$$

Zusatz 2. Setzt man $\theta=\frac{\pi}{2}$, oder, was dasselbe ist,

$$\cos.\theta=0,\ \sin.\theta=1,$$

so verwandeln sich die Gleichungen (29) in

$$(30)\begin{cases} 1-\dfrac{z^2}{1.2}+\dfrac{z^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}\ldots=\cos.z, & \left\{\begin{matrix} z=-\infty \\ z=+\infty \end{matrix}\right\} \\ \dfrac{z}{1}-\dfrac{z^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots=\sin.z, \end{cases}$$

Da diese Gleichungen, so wie auch die Gleichungen (29), für beliebige reelle Werthe von z gelten, so lassen sich die Functionen sin. z und cos z immer in Reihen entwickeln, welche nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von z geordnet sind. Da dieser Satz gemerkt zu werden verdient, so will ich ihn auch direct beweisen. —

Da die Reihe

$$1,\ \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1.2},\ \text{etc.}\ldots.$$

für alle nur möglichen reellen Werthe von x convergirt, so wird sie auch nach Lehrs. 1., Zus. 1. für beliebige imaginäre Werthe dieser Veränderlichen convergiren. Multiplicirt man nun die Summe dieser Reihe mit der Summe der ähnlichen Reihe

$$1,\ \frac{y}{1},\ \frac{y^2}{1.2},\ \text{etc.}\ldots,$$

und erinnert man sich an §. 1., Lehrs. 3., und zugleich an Cap. 8. §. 4., Formel (6), so findet man für alle nur möglichen reellen und imaginären Werthe von x und y

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\text{etc.}\ldots\right)\left(1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\text{etc.}\ldots\right)\\&=1+\frac{x+y}{1}+\frac{(x+y)^2}{1.2}+\text{etc.}\ldots\end{aligned}\right.$$

Setzt man in dieser Gleichung ix für x, und iy für y, so erhält man folgende

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(1+\frac{ix}{1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{ix^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots\right)\\&\times\left(1+\frac{iy}{1}-\frac{y^2}{1.2}-\frac{iy^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots\right)\\&=1+\frac{i(x+y)}{1}-\frac{(x+y)^2}{1.2}-\text{etc.}\ldots,\end{aligned}\right.$$

in welcher die Veränderlichen x und y reell sein können. Setzt man in diesem Falle

$$\varpi(x)=1+\frac{ix}{1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{ix^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots,$$

so verwandelt sich die Gleichung (32) in

$$\varpi(x).\varpi(y)=\varpi(x+y),$$

und man erhält nach Cap. 8., §. 5., Gleich. (12)

$$\varpi(x)=A^x\left[\cos. bx+i\sin. bx\right],$$

oder, was dasselbe ist,

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}&1+\frac{ix}{1}-\frac{x^2}{1.2}-\frac{ix^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}\ldots,\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left\{\begin{matrix}x=-\infty\\x=+\infty\end{matrix}\right\}\\&=A^x\left[\cos. bx+i\sin. bx\right],\end{aligned}\right.$$

wo die Buchstaben A und b zwei unbekannte Constanten bedeuten, von welchen die erste durchaus positiv sein muß. Es ist demnach

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}&1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}\ldots=A^x.\cos bx,\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left\{\begin{matrix}x=-\infty\\x=+\infty\end{matrix}\right\}\\&\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots=A^x.\sin. bx,\end{aligned}\right.$$

Um die Constanten A und b zu bestimmen, darf man nur erwägen: 1) daß die Formeln (34) auch dann noch gelten, wenn man x in — x verwandelt, und daß man alsdann nothwendigerweise

$$A^x = A^{-x}, \text{ also } A = 1$$

setzen muß; 2) daß, wenn man beide Theile der zweiten Formel durch x dividirt, und sodann $x = 0$ setzt, der erste Theil sich auf 1, der zweite Theil hingegen auf

$$\lim. A^x . \frac{\sin. b x}{x} = \lim. \left(A^x . \frac{\sin. bx}{bx} . b \right) = b = 1,$$

reducirt. Die Formeln (33) und (34) verwandeln sich demnach in

$$(35) \begin{cases} 1 + ix - \frac{x^2}{1.2} - \frac{i x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} \ldots, \\ \qquad \left\{ \begin{matrix} x = -\infty \\ x = +\infty \end{matrix} \right\} \\ = \cos. x + i \sin. x. \end{cases}$$

$$(36) \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} \ldots + \cos. x, \\ \qquad \left\{ \begin{matrix} x = -\infty \\ x = +\infty \end{matrix} \right\} \\ \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.} \ldots = \sin. x. \end{cases}$$

Setzt man in den beiden letzten Formeln z für x, so erhält man die Formeln (30).

Es verdient bemerkt zu werden, daß, wenn man in (35) $x = z \sin. \theta$ setzt, man die Reihenentwickelung von

$$\cos. (z \sin. \theta) + i \sin. (z \sin. \theta)$$

nach den aufsteigenden Potenzen von z erhält. Multiplicirt man diese Reihenentwickelung mit der von $e^z \cos. \theta$, und erinnert man sich an die Formel (31), welche für alle reellen und imaginären Werthe von x und y gilt, so erhält man genau die Gleichung (28).

Aufgabe 3. Die Summe der Reihe

$$(11) \begin{cases} \frac{z}{1} (\cos. \theta + i \sin. \theta), - \frac{z^2}{2} (\cos. 2\theta + i \sin. 2\theta), \\ + \frac{z^3}{3} (\cos. 3\theta + i \sin. 3\theta), \text{ etc.} \ldots \end{cases}$$

zu finden, wenn z zwischen den Grenzen

$$-1, +1$$

liegt.

Auflösung. Ist 1 das Zeichen der Neper'schen Logarithmen, so ist

$$(1+2z\cos.\theta+z^2)^{\frac{\mu}{2}} = e^{\frac{\mu}{2}l(1+2z\cos.\theta+z^2)},$$

mithin kann die Gleichung (21) unter die Form

$$1+\frac{\mu}{1}z(\cos.\theta+i\sin.\theta)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}z^2(\cos.2\theta+i\sin.2\theta)$$

$$+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \begin{cases} z=-1 \\ z=+1 \end{cases}$$

$$= e^{\frac{\mu}{2}l(1+2z\cos.\theta+z^2)} \cdot [\cos.\mu s+i\sin.\mu s]$$

gebracht werden, wo s durch die Formel (18) gegeben ist. Entwickelt man in der vorhergehenden Gleichung die beiden Factoren des zweiten Theiles in convergirende, nach den aufsteigenden Potenzen von μ geordnete Reihen; entwickelt man sodann das Product nach Formel (31), so findet man

$$1+\frac{\mu}{1}z(\cos.\theta+i\sin.\theta)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}z^2(\cos.2\theta+i\sin.2\theta)$$

$$+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \begin{cases} z=-1 \\ z=+1 \end{cases}$$

$$=1+\frac{\mu}{1}\left[\frac{1}{2}l(1+2z\cos.\theta+z^2)+is\right]$$

$$+\frac{\mu^2}{1.2}\left[\frac{1}{2}l(1+2z\cos.\theta+z^2)+is\right]^2+\text{etc.}\ldots.$$

Subtrahirt man von jedem Theile der Gleichung 1; dividirt man hierauf durch μ, und setzt man endlich $\mu=0$, so erhält man die Gleichung

$$(37)\begin{cases} \frac{z}{1}(\cos.\theta+i\sin.\theta)-\frac{z^2}{2}(\cos.2\theta+i\sin.2\theta) \\ +\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \begin{cases} z=-1 \\ z=+1 \end{cases} \\ =\frac{1}{2}l(1+2z\cos.\theta+z^2)+is. \end{cases}$$

Zusatz 1. Setzt man in (37) 1) die reellen Theile, 2) die Coefficienten von i, auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich, und setzt man für s seinen Werth aus (18), so findet man

$$(38)\begin{cases} \frac{z}{1}\cos.\theta - \frac{z^2}{2}\cos.2\theta + \frac{z^3}{3}.\cos.3\theta - \text{etc.}\ldots., \\ = \frac{1}{2}l(1+2z\cos.\theta+z^2), \qquad \left\{\begin{matrix} z=-1 \\ z=+1 \end{matrix}\right\} \\ \frac{z}{1}\sin.\theta - \frac{z^2}{2}.\sin.2\theta + \frac{z^3}{3}\sin.3\theta - \text{etc.}\ldots., \\ = \text{arc. tang.}\ \frac{z\sin.\theta}{1+z\cos.\theta}. \end{cases}$$

Zusatz 2. Setzt man $\theta = \frac{\pi}{2}$, oder, was dasselbe ist, $\cos.\theta = 0$, $\sin.\theta = 1$, so verwandelt sich die Gleichung (38) in

$$(39)\quad z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \text{etc.}\ldots. = \text{arc. tang. } z, \left\{\begin{matrix} z=-1 \\ z=+1 \end{matrix}\right\}.$$

Da die Reihe, welche den ersten Theil dieser Gleichung bildet, nach Cap. 6., §. 3., Lehrs. 3., auch dann convergirt, wenn $z = 1$ ist, so wird unsere Gleichung auch in diesem Falle gelten, und da ferner

$$\text{arc. tang. } (1) = \frac{\pi}{4}$$

ist, so ist auch

$$(40)\qquad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \text{etc.}\ldots. = \frac{\pi}{4}.$$

Man kann sich der Formel (40) bedienen, um einen Näherungswerth für π, d. h. für das Verhältniß der Peripherie des Kreises, zu seinem Durchmesser zu erhalten.

§. 3. Bezeichungen einiger imaginären Functionen, welche man durch Summirung convergirender Reihen erhält. Eigenschaften dieser Functionen.

Wir wollen die Bezeichnungen

$$A^x,\ \sin.\ x,\ \cos.\ x,\ Lx,\ \text{arc. sin. } x,\ \text{arc. cos. } x$$

betrachten.

Setzt man für x einen reellen Werth, so drücken diese sechs Bezeichnungen bekanntlich eben so viele reelle Functionen von x aus, von welchen man immer zwei durch entgegengesetzte Operationen erhält, und wo A immer eine Zahl, L das Zeichen der Logarithmen desjenigen Systems bedeutet, dessen Basis A ist. Es muß nun aber auch gezeigt werden, was diese Functionen bedeuten, wenn x imaginär wird. Wir wollen dieses thun und mit den 3 ersten den Anfang machen. — Es ist bewiesen worden, daß die Functionen

$$A^x,\ \sin.\ x,\ \cos.\ x$$

immer in convergirende und nach den aufsteigenden und ganzen Potenzen von x geordnete Reihen entwickelt werden können, wenn x reell ist. Man hat in diesem Falle

$$(1)\begin{cases} A^x = 1 + \dfrac{x\,lA}{1} + \dfrac{x^2(lA)^2}{1.2} + \dfrac{x^3(lA)^3}{1.2.3} + \text{etc.}\ldots, \\ \cos.\,x = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\ldots, \\ \sin.\,x = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\ldots, \end{cases}$$

wo l das Zeichen der Neper'schen Logarithmen ist. Da ferner die erwähnten Reihen nach Lehrs. 1., Zus. 1. des §. 2. für alle reellen und imaginären Werthe von x gelten, so ist man übereingekommen, die Gleichungen (1) auch auf den Fall auszudehnen, wo x imaginär wird, mit Beibehaltung der sonstigen Bedeutung der Zeichen

$$A^x,\ \sin.\ x,\ \cos.\ x.$$

Setzt man in der ersten der Gleichungen (1) $A = e$, wo e die Grundzahl der Neper'schen Logarithmen ist, so erhält man

$$(2)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}\ldots;$$

setzt man ferner für x successive

$$x\,l\,A,\quad i\,x,\quad -i\,x,$$

so findet man

$$(3)\begin{cases} e^{x\,l\,A} = 1 + \dfrac{x\,l\,A}{1} + \dfrac{x^2\,(l\,A)^2}{1.2} + \dfrac{x^3\,(l\,A)^3}{1.2.3} + \text{etc.}\ldots, \\ e^{ix} = 1 + \dfrac{ix}{1} - \dfrac{x^2}{1.2} - \dfrac{ix^3}{1.2.3} + \text{etc.}\ldots, \\ e^{-ix} = 1 - \dfrac{ix}{1} - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{ix^3}{1.2.3} + \text{etc.}\ldots; \end{cases}$$

mithin auch

$$(4)\begin{cases} e^{x\,l\,A} = A^x, \\ e^{ix} = \cos.\,x + i\,\sin.\,x, \\ e^{-ix} = \cos.\,x - i\,\sin.\,x, \end{cases}$$

wo x reell oder imaginär sein kann. Ferner ergibt sich aus §. 2., Gleich. (31) für beliebige Werthe von x und y,

$$(5)\qquad e^x \,.\, e^y = e^{x+y}.$$

Demnach wird es leicht sein, die Werthe von A^x, sin. x, cos. x., welche imaginären Werthen von x entsprechen, unter endlicher Form zu erhalten. Setzt man nämlich

$$(6)\qquad x = \alpha + \beta i,$$

wo α und β reelle Größen bedeuten, so erhält man aus den beiden ersten Gleichungen (4) und aus (5)

$$(7)\begin{cases} A^x = e^{x\,l\,A} = e^{(\alpha+\beta i)\,l\,A} = e^{\alpha\,l\,A} \,.\, e^{\beta\,l\,A\,.\,i} \\ = A^\alpha \left[\cos.\,(\beta\,.\,l\,A) + i\,\sin.\,(\beta\,.\,l\,A)\right], \end{cases}$$

und aus den beiden letzten Gleichungen (4)

$$(8)\begin{cases} \cos.\,x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin.\,x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{cases}$$

Setzt man nun für x seinen Werth $\alpha + \beta i$, und entwickelt man die zweiten Theile, so findet man

$$(9)\begin{cases} \cos. x = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} . \cos. \alpha - \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} . \sin. \alpha . i \\ \sin. x = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} . \sin. \alpha + \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} . \cos. \alpha . i \\ \qquad = \cos. \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta i \right). \end{cases}$$

Die drei Bezeichnungen

$$A^x, \quad \sin. x, \quad \cos. x$$

bedeuten also in dem angenommenen Falle so viel als die imaginären Ausdrücke

$$A^{\alpha} [\cos. (\beta . 1A) + i \sin. (\beta . 1A)],$$

$$\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{1} . \sin. \alpha + \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} . i \cos. \alpha,$$

$$\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} . \cos. \alpha - \frac{(e^{\beta} - e^{-\beta})}{2} . \sin. \alpha.$$

Setzt man $A = e$, so ergibt sich aus (7)

$$e^x = e^{\alpha} (\cos. \beta + i \sin. \beta).$$

Es fragt sich nun noch, was unter

$$Lx, \text{ arc. sin. } x, \text{ arc. cos. } x,$$

oder allgemeiner, unter

$$L ((x)), \text{ arc. sin. } ((x)), \text{ arc. cos. } ((x))$$

zu verstehen ist, wenn x imaginär wird?

Es sei wiederum

$$x = \alpha + \beta i = \varrho (\cos. \theta + i \sin. \theta),$$

wo α und β zwei reelle Größen bedeuten, statt deren auch der Modulus ϱ und der Bogen θ eingeführt werden können. Jeder imaginäre Ausdruck $u + v i$, welcher der Gleichung

$$(10) \qquad A^{u+vi} = \alpha + \beta i = x$$

Genüge leistet, ist ein sogenannter imaginärer Logarithmus von x, in dem System, dessen Grundzahl A ist. Da die Gleichung (10), wie nachher gezeigt werden wird, mehrere Werthe von $u + v i$ liefert, selbst dann, wenn $\beta = 0$ ist, so hat jede reelle oder imaginäre Größe mehrere Logarithmen.

Soll irgend einer von diesen Logarithmen angedeutet werden (den reellen, wenn ein solcher vorhanden ist, nicht ausgeschlossen), so werden wir auf das Zeichen L oder l eine doppelte Klammer folgen lassen; auch soll die Grundzahl des Systems jederzeit gehörig angegeben werden. Für das System, dessen Basis e ist, wählen wir vorzugsweise das Zeichen l. Demnach werden in dem System, dessen Basis A ist, die verschiedenen Logarithmen von

$$1, \; -1, \; \alpha + \beta i, \; x \text{ durch}$$

$$L((1)), \; L((-1)), \; L((\alpha+\beta i)), \; L((x)),$$

in dem System hingegen, dessen Basis e ist, durch

$$l((1)), \; l((-1)), \; l((\alpha+\beta i)), \; l((x))$$

angedeutet.

Aufgabe 1. Die verschiedenen reellen oder imaginären Werthe des Ausdrucks

$$l((1))$$

zu finden.

Auflösung. Es sei $u + vi$ einer dieser Werthe, wo u und v zwei reelle Größen bedeuten, so ist nach der Definition von $l((1))$

$$e^{u+vi} = 1, \tag{11}$$

oder, was dasselbe ist,

$$e^u (\cos. v + i \sin. v) = 1.$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$e^u = 1$$

$$\cos. v + i \sin. v = 1,$$

mithin

$$u = 0, \; \cos. v = 1, \; \sin. v = 0, \; v = \pm 2k\pi,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Da nun die Größen u und v auf diese Weise bestimmt sind, so werden offenbar die verschiedenen Werthe von $u + vi$, welche der Gleichung (11) Genüge leisten, durch die Formel

$$u + vi = \pm 2k\pi . i$$

gegeben sein, d. h. man erhält dieselben aus der Gleichung

$$l((1)) = \pm 2k\pi . i \tag{12}$$

Unter diesen Werthen ist ein einziger reell, und zwar derjenige,

welchen man erhält, wenn man $k = 0$ setzt; und dieser Werth ist Null. Wollen wir diesen Werth bezeichnen, so werden wir ihn durch

$$1\,(1) \text{ oder } 1\,1$$

andeuten. Was die imaginären Werthe von $1\,((1))$ anbetrifft, so ist ihre Anzahl offenbar unendlich groß.

Aufgabe 2. Die verschiedenen Werthe des Ausdrucks

$$1\,((-1))$$

zu finden.

Auflösung. Es sei $u + v\,i$ einer dieser Werthe, wo u und v reelle Größen bedeuten; es ist nach der Definition von $1\,((-1))$

$$(13) \qquad e^{u+vi} = -1,$$

oder, was dasselbe ist,

$$e^u\,(\cos. v + i \sin. v) = -1.$$

Hieraus ergibt sich

$$e^u = 1,\ \cos. v + i \sin. v = -1,$$

mithin

$$u = 0,$$

$$\cos. v = -1,\ \sin. v = 0,\ v = \pm(2k+1)\pi,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Die verschiedenen Werthe von $u + v\,i$, welche der Gleichung (13) Genüge leisten, ergeben sich demnach aus der Formel

$$u + vi = \pm\,(2k+1)\,\pi\,.\,i, \text{ oder}$$

$$(14) \qquad 1\,((-1)) = \pm\,(2k+1)\,\pi\,.\,i;$$

mithin sind alle diese Werthe imaginär.

Aufgabe 3. Die verschiedenen Werthe des Ausdrucks

$$1\,((\alpha + \beta i))$$

zu finden.

Auflösung. Es sei $u + v\,i$ einer dieser Werthe; so ist nach der Definition von $1\,((\alpha + \beta\,i))$

$$(15) \qquad e^{u+vi} = \alpha + \beta\,i = \varrho\,(\cos. \theta + i \sin. \theta),$$

oder, was dasselbe ist,

$$e^u\,(\cos. v + i \sin. v) = \varrho\,(\cos. \theta + i \sin. \theta).$$

Hieraus ergibt sich

$$e^u = \varrho, \ \cos. v + i \sin. v = \cos. \theta + i \sin. \theta,$$

mithin auch

$$u = l\varrho,$$

$$\cos. v = \cos. \theta, \ \sin. v = \sin. \theta, \ v = \theta \pm 2k\pi,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Die verschiedenen Werthe von $u + vi$ ergeben sich demnach aus der Formel

$$u + vi = l\varrho + i\theta \pm 2ik\pi, \text{ oder}$$

$$(16) \qquad l((\alpha + \beta i)) = l\varrho + i\theta + l((1)).$$

Es verdient bemerkt zu werden: daß in dieser Gleichung

$$\varrho = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$$

ist, während der Bogen θ einer von denjenigen ist — und zwar ein beliebiger — deren Cosinus $\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$, der Sinus hingegen $\frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$ ist.

Zusatz 1. Setzt man, größerer Bequemlichkeit wegen,

$$(17) \qquad \zeta = \text{arc. tang.} \frac{\beta}{\alpha},$$

so ist es leicht, den Bogen ζ für θ in (16) einzuführen. Man darf nur

$$\theta = \zeta$$

setzen, wenn α positiv, und

$$\theta = \zeta + \pi,$$

wenn α negativ ist, so findet man in dem ersten Falle

$$(18) \qquad l((\alpha + \beta i)) = l\varrho + i\zeta + l((1));$$

im zweiten Falle

$$(19) \qquad l((\alpha + \beta i)) = l\varrho + i\zeta + i\pi + l((1)).$$

Setzt man in dieser Gleichung $\alpha + \beta i = -1$, d h. $\alpha = -1$, $\beta = 0$, mithin $\varrho = 1$, $\zeta = 0$, so verwandelt sie sich in

$$(20) \qquad l((-1)) = i\pi + l((1)).$$

Ist α negativ, so erhält man demnach offenbar

$$(21) \qquad l((\alpha + \beta i)) = l\varrho + i\zeta + l((-1)).$$

Setzt man in (18) und (21) für ϱ und ζ ihre Werthe

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}} \text{ und arc. tang. } \frac{\beta}{\alpha},$$

so findet man, wenn α positiv ist,

$$(22)\begin{cases} 1\,((\alpha+\beta i)) \\ =\frac{1}{2}1(\alpha^2+\beta^2)+i.\left(\text{arc. tang. }\frac{\beta}{\alpha}\right)+1((1)), \end{cases}$$

wenn α negativ ist,

$$(23)\begin{cases} 1\,((\alpha+\beta i)) \\ =\frac{1}{2}1(\alpha^2+\beta^2)+i.\left(\text{arc. tang. }\frac{\beta}{\alpha}\right)+1((-1)). \end{cases}$$

Zusatz 2. Setzt man in (22) und (23) $\beta=0$, so erhält man für positive Werthe von α

$$(24)\quad 1\,((\alpha)) = 1\alpha+1((1))=1\alpha\pm 2ik\pi,$$

und für negative Werthe von α

$$(25)\quad 1((\alpha))=1(-\alpha)+1((-1))=1(-\alpha)\pm(2k+1).i\pi,$$

wo k immer eine ganze Zahl sein muß. — Aus dieser Formel folgt, daß eine reelle Größe α unendlich viele Logarithmen hat, unter welchen nur einer reell ist, und diesen Einen auch dann nur, wenn α positiv ist. Diesen reellen Logarithmus, den wir durch $1\,(\alpha)$ oder durch 1α bezeichnen, erhält man, wenn man in (24) $k=0$ setzt.

Anmerkung. Unter den Werthen von $1\,((1))$ ist, wie schon bemerkt, einer, und zwar $1\,(1)=11$, gleich Null. Substituirt man diesen besonderen Werth in (22), so erhält man den correspondirenden Werth von $1\,((\alpha+\beta i))$, welchen wir der Analogie wegen durch $1\,(\alpha+\beta i)$ bezeichnen wollen. Mithin ist

$$(26)\quad 1\,(\alpha+\beta i)=\frac{1}{2}1(\alpha^2+\beta^2)+i\left(\text{arc. tang. }\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Ist α negativ, also $-\alpha$ positiv, so erhält man

$$1(-\alpha-\beta i)=\frac{1}{2}1(\alpha^2+\beta^2)+i\left(\text{arc. tang. }\frac{-\beta}{-\alpha}\right),$$

oder, was dasselbe ist,

$$(27)\quad 1\,(-\alpha-\beta i)=\frac{1}{2}1(\alpha^2+\beta^2)+i\left(\text{arc. tang.}\,\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Hiernach lassen sich die Formeln (22) und (23) auf folgende reduciren

$$(28)\quad 1\,((\alpha+\beta i))=1(\alpha+\beta i)+1\,((1)),$$

$$(29)\quad 1\,((\alpha+\beta i))=1(-\alpha-\beta i)+1\,((-1)),$$

von welchen die erste sich auf positive, die zweite hingegen auf negative Werthe von α bezieht.

Je nachdem also der reelle Theil eines imaginären Ausdrucks, welchen letztern wir durch x bezeichnen wollen, positiv oder negativ ist, hat man

$$(30)\quad 1\,((x))=1(x)+1\,((1)),$$

oder

$$(31)\quad 1\,((x))=1(-x)+1\,((-1)).$$

Faßt man das bisher Gesagte zusammen, so sieht man, daß

$$1\,(x)$$

nur dann eine durch die Gleichung (26) bestimmte Bedeutung hat, wenn der reelle Theil des durch x bezeichneten imaginären Ausdrucks positiv ist, während

$$1\,((x))$$

in allen nur denkbaren Fällen unendlich viele Werthe hat, welche sich entweder aus (28) oder aus (29) ergeben.

Aufgabe 4. Die verschiedenen Werthe des Ausdrucks

$$L\,((\alpha+\beta i))$$

zu finden, wo L das Logarithmenzeichen für dasjenige System bedeutet, dessen Grundzahl A ist.

Auflösung. Es sei auch hier $u+vi$ einer dieser Werthe, so ist nach der Definition von $L\,((\alpha+\beta i))$

$$(32)\quad A^{u+vi}=\alpha+\beta i,$$

oder, was dasselbe ist,

$$e^{(u+vi)1A}=\alpha+\beta i.$$

Hieraus folgt:

$$(u+vi)\,1A=1\,((\alpha+\beta i)),$$

mithin

$$u + vi = \frac{1((\alpha + \beta i))}{1A}, \text{ d. h.}$$

$$(33) \quad L((\alpha + \beta i)) = \frac{1((\alpha + \beta i))}{1A}.$$

Diese Gleichung gilt selbst dann, wenn $\beta = 0$ ist, d. h., wenn $\alpha + \beta i$ sich auf eine reelle Größe reducirt.

Anmerkung. Ist α positiv, so entspricht dem Werthe $1(\alpha + \beta i)$ ein besonderer Werth von $L((\alpha + \beta i))$, welchen wir der Analogie wegen durch $L(\alpha + \beta i)$ bezeichnen wollen. Es ist demnach

$$(34) \begin{cases} L(\alpha + \beta i) = \dfrac{1(\alpha + \beta i)}{1A} \\ = \dfrac{1}{2} L(\alpha^2 + \beta^2) + i \cdot \dfrac{\text{arc. tang.} \dfrac{\beta}{\alpha}}{1A}. \end{cases}$$

Setzt man ferner für $1((\alpha + \beta i))$ seinen Werth aus (28) und (29), so findet man für positive Werthe von α

$$(35) \begin{cases} L((\alpha + \beta i)) = \dfrac{1(\alpha + \beta i)}{1A} + \dfrac{1((1))}{1A} \\ = L(\alpha + \beta i) + L((1)), \end{cases}$$

und für negative Werthe von α

$$(36) \begin{cases} L((\alpha + \beta i)) = \dfrac{1(-\alpha - \beta i)}{1A} + 1((-1)) \\ = L(-\alpha - \beta i) + L((-1)). \end{cases}$$

Je nachdem also der reelle Theil eines imaginären Ausdrucks, welchen letztern wir durch x bezeichnen wollen, positiv oder negativ ist, hat man entweder

$$(37) \quad L((x)) = L(x) + L((1)) = Lx \pm \frac{2ik\pi}{1A},$$

oder

$$(38) \quad L((x)) = L(-x) + L((-1)) = L(-x) \pm \frac{(2k+1) \cdot i\pi}{1A},$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Die erste von diesen Formeln gilt auch für alle reellen und positiven, die zweite hingegen für alle reellen und negativen Werthe von x.

Wir wollen nun, nachdem wir die verschiedenen Logarithmen von $x = \alpha + \beta i$ gefunden haben, die imaginären Bogen aufsuchen, deren Cosinus x ist. Bezeichnet

$$\text{arc. cos. } ((x)) = u + vi$$

einen dieser Werthe, so hat man, um $u + vi$ zu bestimmen, die Gleichung

$$\cos. (u + vi) = \alpha + \beta i,$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$(39) \quad \frac{e^v + e^{-v}}{2} . \cos. u - \frac{(e^v - e^{-v})}{2} . \sin. u . i = \alpha + \beta i$$

zu betrachten, welche in zwei andere zerfällt, und zwar in

$$(40) \quad \frac{e^v + e^{-v}}{2} . \cos. u = \alpha, \quad \frac{e^v - e^{-v}}{2} . \sin. u = -\beta.$$

Für die letztern kann man die beiden Formeln

$$(41) \quad e^v = \frac{\alpha}{\cos. u} - \frac{\beta}{\sin. u}, \quad e^{-v} = \frac{\alpha}{\cos. u} + \frac{\beta}{\sin. u}$$

in die Rechnung einführen. Eliminirt man ferner v aus den Formeln (41), so erhält man successive

$$\frac{\alpha^2}{\cos. u^2} - \frac{\beta^2}{\sin. u^2} = 1$$

$$\sin. u^4 - (1 - \alpha^2 - \beta^2) \sin. u^2 - \beta^2 = 0;$$

ferner, da $\sin. u^2$ nothwendigerweise positiv ist,

$$\sin. u^2 = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2}\right)^2 + \beta^2\right]},$$

und

$$\cos. u^2 = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2\right]}$$

$$= \frac{\alpha^2}{\left\{\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

und da cos., u und α nach (40) Gleichung 1., einerlei Zeichen haben müssen, so findet man durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$(42)\quad \cos. u = \frac{\alpha}{\left\{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man der Bequemlichkeit wegen

$$(43)\quad \begin{cases} U = \text{arc.cos.} \dfrac{\alpha}{\left\{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)-\alpha^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}} \\ V = 1\left(\dfrac{\alpha}{\cos. U}-\dfrac{\beta}{\sin. U}\right), \end{cases}$$

so ergibt sich aus (41) und (42)

$$(44)\quad u = \pm U \pm 2k\pi,\quad v = \pm V,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl ist; die beiden Buchstaben U und V aber einerlei Zeichen haben müssen. Mithin ist

$$(45)\quad \text{arc. cos. } ((x)) = \pm 2k\pi \pm (U + Vi).$$

Der einfachste unter allen Werthen, welche diese Gleichung liefert, ist derjenige, den man erhält, wenn man im ersten Gliede des zweiten Theiles $k = 0$ setzt und das zweite Glied mit dem Zeichen + nimmt. Wir wollen ihn vermittelst einer einfachen Klammer, also durch

$$\text{arc. cos. } (x) = U + Vi,$$

oder durch Weglassung aller Klammern, also durch

$$(46)\quad \text{arc. cos. } x = U + Vi,$$

bezeichnen. — Ist $\beta = 0$, und liegt α zwischen den Grenzen -1, $+1$, so reducirt sich die Formel (46) auf die identische Gleichung

$$\text{arc. cos. } \alpha = \text{arc. cos } \alpha,$$

was vorauszusehen war. Da ferner $\pm 2k\pi$ irgend einer von den Bogen ist, deren cos. $= 1$, so sieht man leicht ein, daß die Gleichung (45) unter die Form

(47) arc. cos. ((x)) = ± arc. cos. x + arc. cos. ((1))

gebracht werden kann.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß, wenn $\beta = 0$, und der Zahlenwerth von α größer als die Einheit ist, der Ausdruck

arc. cos. α

imaginär ist. Dieser Werth ergibt sich aus der Gleichung

(48) arc. cos. $\alpha = i \cdot l(\alpha)$,

wenn α positiv ist, und aus

(49) arc. cos. $\alpha = \pi + l(-\alpha) \cdot i = [l(-\alpha) - i\pi] \cdot i$,

wenn α negativ ist.

Wir wollen nun auch die imaginären Bogen betrachten, deren Sinus $x = \alpha + \beta i$ ist. Ist einer dieser Bogen

arc. sin. ((x)) = u + vi,

so findet man mit Bezugnahme auf die zweite der Gleichungen (9)

$$x = \sin.(u + vi) = \cos.\left(\frac{\pi}{2} - u - vi\right),$$

mithin

$$(50) \qquad \text{arc. sin.}((x)) = u + vi = \frac{\pi}{2} - \text{arc. cos.}((x)).$$

Substituirt man in (50) die verschiedenen Werthe von arc. cos. ((x)), von denen der eine durch arc. cos. (x) oder arc. cos. x bezeichnet worden ist, so erhält man die verschiedenen Werthe von arc. sin. ((x)), von welchen der eine

$$(51) \qquad \text{arc. sin. } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc. cos. } x$$

sein wird.

Mit Hülfe der eben aufgestellten Principien kann man die wichtigsten Eigenschaften der durch

A^x, cos. x, sin. x,

Lx, arc. cos. x, arc. sin. x

bezeichneten Functionen der imaginären Veränderlichen x sehr leicht erforschen. Man darf nämlich nur die Formeln, welchen diese Functionen Genüge leisten, wenn x reell ist, auf den Fall ausdehnen, wo die Veränderliche imaginär wird; was bei den drei Functionen

A^x, cos. x, sin. x

nicht die geringste Schwierigkeit macht.

Bezeichnen z. B. A, B, C,... verschiedene Zahlen, so läßt sich leicht beweisen, daß die Gleichungen

$$(52)\quad \begin{cases} A^x \,.\, A^y \,.\, A^z \ldots = A^{x+y+z\ldots} \\ A^x \,.\, B^x \,.\, C^x \ldots = (ABC\ldots)^x, \end{cases}$$

$$(53)\quad \begin{cases} \cos.(x+y) = \cos. x \cos. y - \sin. x \sin. y \\ \sin.(x+y) = \sin. x \cos. y + \sin. y \cos. x \end{cases}$$

ebensowohl für beliebige imaginäre, als für reelle Werthe von x, y, z... gelten. Betrachtet man hingegen Formeln, welche die Functionen

Lx, arc. cos. x, arc. sin. x

enthalten, so findet man gemeinhin, daß diese Formeln nur mit bedeutenden Einschränkungen und für gewisse Werthe der darin vorkommenden Veränderlichen gelten, wenn die letztern imaginär werden. Setzt man z. B.

$$x = \alpha + \beta i,\ y = \alpha' + \beta' i,\ z = \alpha'' + \beta'' i,\ \text{etc.}\ldots,$$

und bezeichnet man durch μ eine beliebige reelle Größe, so ist es klar, daß die Formel

$$(54)\qquad Lx + Ly + Lz + \text{etc.}\ldots = L(xyz\ldots)$$

nur dann gilt, wenn die Summe

$$\text{arc. tang.}\frac{\beta}{\alpha} + \text{arc. tang.}\frac{\beta'}{\alpha'} + \text{arc. tang.}\frac{\beta''}{\alpha''} + \text{etc.}\ldots$$

zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ liegt, wobei überdies die Größen α, α', α'', etc.... positiv sein müssen; und die Formel

$$(55)\qquad L(x^\mu) = \mu\, Lx$$

nur dann, wenn α positiv ist, und das Product

$$\mu\ \text{arc. tang.}\frac{\beta}{\alpha}$$

zwischen denselben Grenzen liegt.

Zehntes Capitel.

Von den möglichen oder imaginären Wurzeln der algebraischen Gleichungen, deren erster Theil eine rationale und ganze Function einer einzigen Veränderlichen ist. Auflösung einiger Gleichungen dieser Art mit Hülfe der Algebra oder der Trigonometrie.

---

§. 1. Man kann jeder Gleichung, deren erster Theil eine rationale und ganze Function der Veränderlichen x ist, durch reelle oder imaginäre Werthe dieser Veränderlichen Genüge leisten. Zerlegung der Polynomien in Factoren vom ersten oder vom zweiten Grade. Geometrische Darstellung der reellen Factoren vom zweiten Grade.

Wir wollen eine algebraische Gleichung betrachten, deren erster Theil eine rationale und ganze Function von x ist. Bezeichnet n den Grad derselben, so kann sie unter die Form

$$(1)\quad a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

gebracht werden, wo a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n constante, reelle oder imaginäre Coefficienten sind. Jeder reelle oder imaginäre Ausdruck, welcher, für x substituirt, den ersten Theil der Gleichung auf Null bringt, heißt eine Wurzel der Gleichung. Wir wollen zuvörderst annehmen, die Constanten a_0, a_1, a_2, ... a_n seien reell. Wenn in diesem Falle zwei für x in (1) substituirte reelle Werthe zwei Resultate, zwischen welchen Null liegt,

d. h. zwei Resultate von entgegengesetzten Zeichen ergeben, so folgt aus Cap. 2., §. 2., Lehrs. 4., daß die Gleichung (1) eine oder mehrere Wurzeln hat, welche zwischen diesen Grenzen liegen. Hieraus folgt, daß jede Gleichung von einem ungeraden Grade wenigstens eine reelle Wurzel hat. In der That ändert die Gleichung (1) zugleich mit ihrem ersten Gliede $a_0 x^n$ das Zeichen, wenn man der Veränderlichen x sehr große Zahlenwerthe von entgegengesetzten Zeichen beilegt (s. Cap. 2., §. 1., Lehrs. 8.).

Ist n eine gerade Zahl, so bleibt x^n so lange positiv, als x reell ist, und der erste Theil der Gleichung (1) hat für sehr große Werthe von x beständig einerlei Zeichen mit a_0. Haben in diesem Falle a_n und a_0 entgegengesetzte Zeichen, so ändert der erste Theil der Gleichung offenbar sein Zeichen, wenn man auf einen sehr großen Werth von x einen sehr kleinen folgen läßt, ohne jedoch das Zeichen zu ändern. Die Gleichung (1) hat demnach zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative. Ist n eine gerade Zahl, während a_n und a_0 einerlei Zeichen haben, so kann der Fall eintreten, daß der erste Theil der Gleichung (1) für alle reellen Werthe von x einerlei Zeichen mit a_0 hat und niemals verschwindet. Dieses ist z. B. bei den binomischen Gleichungen

$$x^2+1=0,\ x^4+1=0,\ x^6+1=0$$

der Fall. In einem solchen Falle wird die Gleichung (1) gar keine reelle Wurzel haben; man wird ihr indessen Genüge leisten können, wenn man für x einen imaginären Ausdruck

$$u+vi$$

setzt, wo u, v zwei reelle Größen bedeuten. Dieses und alles bisher Gesagte ergibt sich aus folgendem Lehrsatze.

Lehrsatz 1. Die Gleichung vom n^{ten} Grade

$$(1)\quad a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

hat, unabhängig von allen besonderen reellen oder imaginären Werthen der Constanten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ immer reelle oder imaginäre Wurzeln.

Beweis. Wir wollen der Kürze wegen den ersten Theil der Gleichung (1) durch f (x) bezeichnen, so wird f (x) eine reelle oder imaginäre, aber beständig eine ganze Function von x sein, und da jeder reelle Ausdruck u als ein besonderer Werth eines imaginären Ausdrucks $u + vi$ angesehen werden kann, so wird der aufgestellte Lehrsatz bewiesen sein, sobald wir dargethan haben, daß man der Gleichung

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

allgemein Genüge leisten kann, indem man

$$x = u + vi$$

setzt und sodann den neuen Veränderlichen u und v reelle Werthe beilegt. Substituirt man den obigen Werth von x in f (x), so erhält man ein Resultat von der Form

$$\varphi(u, v) + i\chi(u, v),$$

wo $\varphi(u, v)$, $\chi(u, v)$ zwei reelle und ganze Functionen von u und v bedeuten. Die Gleichung (1) verwandelt sich mithin in

$$\varphi(u, v) + i\chi(u, v) = 0$$

und um ihr Genüge zu leisten, darf man nur den beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \varphi(u, v) = 0, \\ \chi(u, v) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

oder, was dasselbe ist, der Gleichung

$$[\varphi(u, v)]^2 + [\chi(u, v)]^2 = 0 \tag{3}$$

genügen. Setzt man größerer Bequemlichkeit wegen

$$F(u, v) = [\varphi(u, v)]^2 + [\chi(u, v)]^2, \tag{4}$$

so wäre also nur noch zu zeigen, daß man reelle Werthe von u und v finden kann, für welche die Function

$$F(u, v)$$

verschwindet, und dazu gelangt man ohne alle Mühe durch folgende Betrachtungen.

Um den allgemeinen Werth von F (u, v) zu bestimmen, haben wir eine jede der reellen oder imaginären Constanten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, desgleichen die imaginäre Veränderliche

$u + v\,i$ durch das Product eines Modulus und eines reducirten Ausdrucks zu bezeichnen; wir werden daher

$$(5)\quad \begin{cases} a_0 = \varrho_0(\cos.\theta_0 + i\sin.\theta_0),\ a_1 = \varrho_1(\cos.\theta_1 + i\sin.\theta_1), \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} = \varrho_{n-1}(\cos.\theta_{n-1} + i\sin.\theta_{n-1}),\ a_n = \varrho_n(\cos.\theta_n + i\sin.\theta_n), \end{cases}$$

$$(6)\quad u + vi = r(\cos.t + i\sin.t)$$

setzen, und erhalten sodann

$$(7)\quad \begin{cases} f(u+vi) = \varrho_0 r^n[\cos.(nt+\theta_0) + i\sin.(nt+\theta_0)] \\ \quad + \varrho_1 r^{n-1}[\cos.(\overline{n-1}.t+\theta_1) + i\sin.(\overline{n-1}.t+\theta_1)] \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \varrho_{n-1} r[\cos.(t+\theta_{n-1}) + i\sin.(t+\theta_{n-1})] \\ \quad + \varrho_n(\cos.\theta_n + i\sin.\theta_n)]. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$(8)\quad \begin{cases} \varphi(u,v) = \varrho_0 r^n\cos.(nt+\theta_0) + \varrho_1 r^{n-1}\cos.(\overline{n-1}.t+\theta_1) + \ldots \\ \quad \ldots + \varrho_{n-1} r\cos.(t+\theta_{n-1}) + \varrho_n\cos.\theta_n, \\ \chi(u,v) = \varrho_0 r^n\sin.(nt+\theta_0) + \varrho_1 r^{n-1}\sin.(\overline{n-1}.t+\theta_1) + \ldots \\ \quad \ldots + \varrho_{n-1} r\sin.(t+\theta_{n-1}) + \varrho_n\sin.\theta_n; \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} F(u,v) = \\ \left\{\begin{array}{l} \varrho_0 r^n\cos.(nt+\theta_0) + \varrho_1 r^{n-1}\cos.(\overline{n-1}.t+\theta_1) + \ldots \\ \ldots + \varrho_{n-1} r\cos.(t+\theta_{n-1}) + \varrho_n\cos.\theta_n \end{array}\right\}^2 \\ \left\{\begin{array}{l} +\varrho_0 r^n\sin.(nt+\theta_0) + \varrho_1 r^{n-1}\sin.(\overline{n-1}.t+\theta_1) + \ldots \\ \ldots + \varrho_{n-1} r\sin.(t+\theta_{n-1}) + \varrho_n\sin.\theta_n \end{array}\right\}^2 \\ = r^{2n}\left\{\begin{array}{l} \varrho_0^2 + \dfrac{2\varrho_0\varrho_1\cos.(t+\theta_0-\theta_1)}{r} \\ + \dfrac{\varrho_1^2 + 2\varrho_0\varrho_2\cos.(2t+\theta_0-\theta_2)}{r^2} \\ + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \end{cases}$$

Aus dieser Formel folgt, daß die Function $F(u, v)$, welche offenbar beständig positiv ist, das Product zweier Factoren ist, von welchen der eine und zwar

$$r^{2n} = (u^2 + v^2)^n$$

zuletzt unendlich groß wird, wenn die Veränderlichen u, v, oder auch nur eine derselben beständig wächst; während der andere Factor im gleichen Falle sich der Grenze ϱ_0^2, d. h. einer von Null verschiedenen bestimmten Grenze, nähert. Die Function F (u, v) hat demnach nur dann einen endlichen Werth, wenn u und v selbst endlich sind, und wird dagegen unendlich, wenn eine dieser beiden Größen es wird. Da überdies die Gleichung (4) für F (u, v) eine ganze, mithin auch stetige Function von u und v gibt, so ist es klar, daß, wenn man den Werth von F (u, v) allmälig abnehmen läßt, dieser Werth, da er nie unter Null herabgehen kann, eine gewisse untere Grenze, über welche er nicht hinausgeht, einmal oder mehrmals erreichen wird. Wir wollen diese Grenze durch A bezeichnen, und durch u_0, v_0 ein System von Werthen von u und v, für welche F (u, v) sich auf A reducirt, so daß also

$$F(u_0, v_0) = A \tag{10}$$

ist. Die Differenz $F(u, v) - F(u_0, v_0)$ wird niemals negativ sein. Setzt man demnach

$$u = u_0 + \alpha h, \quad v = v_0 + \alpha k, \tag{11}$$

wo α ein unendlich Kleines bedeutet, h und k hingegen zwei endliche Größen, so wird der Ausdruck

$$F(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) - F(u_0, v_0)$$

niemals negativ werden. Hiernach läßt sich der Werth der Constanten A leicht bestimmen, wie gezeigt werden soll. Substituirt man in f (u + vi) für u und v ihre durch die Formeln (11) gegebenen Werthe, so wird dieser Ausdruck, da er alsdann eine imaginäre und ganze Function des Productes

$$\alpha (h + ki)$$

wird, nach den ganzen und aufsteigenden Potenzen dieses Productes entwickelt werden können. Bezeichnet man durch

$$R(\cos. T + i \sin. T), \quad R_1(\cos. T_1 + i \sin. T_1), \ldots$$
$$\ldots, R_n(\cos. T_n + i \sin. T_n)$$

die imaginären Coefficienten dieser Potenzen, von welchen einige sich auf Null reduciren können, und setzt man der Bequemlichkeit wegen

$$(12) \qquad h + ki = \varrho(\cos.\theta + i\sin.\theta),$$

so erhält man die Gleichung

$$(13)\begin{cases} f[u_0 + v_0 i + \alpha(h+ki)] = R(\cos.T + i\sin.T) \\ + \alpha R_1 \varrho[\cos.(T_1+\theta) + i\sin.(T_1+\theta) + \ldots \\ \ldots \alpha^n R_n \varrho^n[\cos.(T_n + n\theta) + i\sin.(T_n + n\theta)], \end{cases}$$

in welcher die Glieder des zweiten Theiles, mithin auch die Moduli

$$R,\ R_1, \ldots R_n$$

nicht alle zu gleicher Zeit verschwinden können.

Nun ist aber

$$(14)\begin{cases} f[u_0 + \alpha h + (v_0 + \alpha k)i] \\ = \varphi(u_0 + \alpha h,\ v_0 + \alpha k) + i\chi(u_0 + \alpha h,\ v_0 + \alpha k). \end{cases}$$

Aus (13) erhält man

$$(15)\begin{cases} \varphi(u_0 + \alpha h,\ v_0 + \alpha k) = R\cos.T + \alpha R_1 \varrho\cos.(T_1+\theta) + \ldots \\ \qquad \ldots + \alpha^n R_n \varrho^n \cos.(T_n + n\theta), \\ \chi(u_0 + \alpha h,\ v_0 + \alpha k) = R\sin.T + \alpha R_1 \varrho\sin.(T_1+\theta) + \ldots \\ \qquad \ldots + \alpha^n R_n \varrho^n \sin.(T_n + n\theta), \end{cases}$$

mithin

$$(16)\begin{cases} F(u_0 + \alpha h,\ v_0 + \alpha k) = \\ [R\cos.T + \alpha R_1 \varrho\cos.(T_1+\theta) + \ldots + \alpha^n R_n \varrho^n \cos.(T_n + n\theta)]^2 \\ + [R\sin.T + \alpha R_1 \varrho\sin.(T_1+\theta) + \ldots + \alpha^n R_n \varrho^n \sin.(T_n + n\theta)]^2. \end{cases}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\alpha = 0$, so erhält man

$$F(u_0,\ v_0) = R^2,$$

mithin $R^2 = A$, $R = A^{\frac{1}{2}}$. Entwickelt man nun den zweiten Theil der Gleichung (16) nach den aufsteigenden Potenzen von R, und setzt man alsdann $A^{\frac{1}{2}}$ für R, so verwandelt sich die Gleichung in

$$(17) \qquad F(u_0 + \alpha h,\ v_0 + \alpha k) =$$

$$A + 2A^{\frac{1}{2}}\alpha\varrho[R_1\cos.(T_1 - T + \theta) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha^{n-1}\varrho^{n-1}R_n\cos.(T_n - T + n\theta)]$$
$$+\alpha^2\varrho^2\left[\begin{array}{l}[R_1\cos.(T_1+\theta) + \ldots + \alpha^{n-1}\varrho^{n-1}R_n\cos.(T_n+n\theta)]^2 \\ +[R_1\sin.(T_1+\theta) + \ldots + \alpha^{n-1}\varrho^{n-1}R_n\sin.(T_n+n\theta)]^2\end{array}\right]$$

und wenn man $A = F(u_0, v_0)$ in den ersten Theil bringt, so findet man

(18) $$F(u_0+\alpha h, v_0+\alpha k) - F(u_0, v_0) =$$
$$2A^{\frac{1}{2}}\alpha\varrho[R_1\cos.(T_1-T+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\varrho^{n-1}R_n\cos.(T_n-T+n\theta)]$$
$$+\alpha^2\varrho^2\begin{bmatrix}[R_1\cos.(T_1+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\varrho^{n-1}R_n\cos.(T_n+n\theta)]^2\\+[R_1\sin.(T_1+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\varrho^{n-1}R_n\sin.(T_n+n\theta)]^2\end{bmatrix}.$$

Da nun die Differenz

$$F(u_0+\alpha h, v_0+\alpha k) - F(u_0, v_0)$$

nie unter die Grenze Null herabsinken kann, so kann auch der zweite Theil der zuletzt gefundenen Gleichung, mithin auch dessen erstes Glied, d. h. dasjenige Glied, welches die niedrigste Potenz von α enthält, nicht negativ werden. Bezeichnet man nun durch R_m die erste der Größen

$$R_1, R_2, \ldots\ldots R_n,$$

deren Werth von Null verschieden ist, so ist das zugehörige Glied

$$2A^{\frac{1}{2}}\alpha^m\varrho^m R_m\cos.(T_m - T + m\theta),$$

wenn A nicht Null ist; im entgegengesetzten Falle aber ist es

$$\alpha^{2m}\varrho^{2m}R_m{}^2.$$

Da ferner der Bogen θ ganz unbestimmt ist, so könnte man denselben dergestalt bestimmen, daß der Factor

$$\cos.(T_m - T + m\theta),$$

mithin auch das Product

$$2A^{\frac{1}{2}}\alpha^m\varrho^m R^m\cos.(T^m - T + m\theta)$$

ein beliebiges Zeichen erhielte; folglich muß der zweite Fall stattfinden, und es ist nothwendigerweise

(19) $$A = 0,$$

wodurch die Gleichung (10) auf

(20) $$F(u_0, v_0) = 0$$

reducirt wird. Die Function $F(u_0, v_0)$ wird demnach verschwinden, wenn $u = u_0$, und $v = v_0$ gesetzt wird, und man wird der Gleichung

(1) $$f(x) = 0$$

Genüge leisten, wenn man

$$x = u_0 - v_0 i$$

setzt, d. h. $u_0 + v_0 i$ ist eine Wurzel der Gleichung

$$(1) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Vorstehender Beweis des ersten Lehrsatzes beruht, obgleich er in manchen Puncten sich von demjenigen unterscheidet, welchen Legendre (Théorie des nombres, Theil 1., §. 14.) gegeben hat, dennoch auf denselben Principien.

Zusatz. Da das Polynom

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

für $x = u_0 + v_0 i$ verschwindet, so ist es nach Cap. 8., §. 4., Lehrsatz 1. durch den Factor

$$x - u_0 - v_0 i$$

algebraisch theilbar. Der Quotient, welcher in Beziehung auf x ein Polynom vom $(n-1)^{ten}$ Grade sein muß, wird nothwendigerweise durch einen neuen Factor von der Form des vorigen theilbar sein, den wir durch

$$x - u_1 - v_1 i$$

bezeichnen wollen. Das Polynom $f(x)$ wird demnach dem Producte der beiden Factoren

$$x - u_0 + v_0 i, \; x - u_1 - v\, i$$

und eines Polynoms vom $(n-2)^{ten}$ Grade gleich sein, und eben so läßt sich darthun, daß dieses dritte Polynom durch einen ähnlichen Factor, wie die beiden ersteren, theilbar ist. Schließt man auf diese Weise fort, so erhält man zuletzt n lineäre Factoren von $f(x)$. Diese Factoren seien respective

$$x - u_0 - v_0 i, \; x - u_1 - v_1 i, \ldots, x - u_{n-1} - v_{n-1} . i.$$

Dividirt man $f(x)$ durch das Product aller dieser Factoren, so ist der Quotient offenbar dem Coefficienten a_0 gleich, d. h. dem Coefficienten der höchsten Potenz von x, welche in $f(x)$ vorkommt. Mithin ist

$$(21) \quad f(x) = 0 = a_0 (x - u_0 - v_0 i)(x - u_1 - v_1 i) \ldots (x - u_{n-1} - v_{n-1} . i).$$

Diese Gleichung enthält folgenden Lehrsatz:

Lehrsatz 2. Das Polynom

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = f(x)$$

ist (unabhängig von allen besonderen reellen oder

imaginären Werthen der Constanten $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$) dem Producte der Constanten a_0 und n lineärer Factoren von der Form

$$x - \alpha - \beta i$$

gleich.

Die erwähnten Factoren bestimmen, heißt: das Polynom $f(x)$ in seine lineären Factoren zerlegen. Es gibt nur eine einzige Art dieser Zerlegung. Um dieses zu beweisen, wollen wir annehmen, wir hätten durch zwei verschiedene Methoden die Gleichungen

$$(22)\quad \begin{cases} f(x) = a_0 (x - u_0 - v_0 i)(x - u_1 - v_1 i) \ldots \\ \quad \ldots (x - u_{n-1} - v_{n-1} . i) \\ f(x) = a_0 (x - \alpha_0 - \beta_0 i)(x - \alpha_1 - \beta_1 i) \ldots \\ \quad \ldots (x - \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} i) \end{cases}$$

erhalten; so wäre auch

$$(23)\quad \begin{cases} (x - \alpha_0 - \beta_0 i)(x - \alpha_1 - \beta_1 i) \ldots (x - \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} i) \\ = (x - u_0 - v_0 i)(x - u_1 - v_1 i) \ldots (x - u_{n-1} - v_{n-1} i). \end{cases}$$

Da nun der zweite Theil dieser Formel für $x = u_0 + i v_0$ verschwindet, so muß dieses auch beim ersten Theile der Fall sein; es muß also nach Cap. 7., §. 2., Lehrs. 7., Zus. 2. einer der Factoren dieses Theiles sich auf Null reduciren. Es sei dieser Factor

$$x - \alpha_0 - \beta_0 i,$$

so ist offenbar $\alpha_0 + \beta_0 i = u_0 + i v_0$; mithin

$$x - \alpha_0 - \beta_0 i = x - u_0 - i v_0;$$

mithin reducirt sich die Formel (23) auf

$$(x - \alpha_1 - \beta_1 i) \ldots (x - \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} i)$$
$$= (x - u_1 - i v_1) \ldots (x - u_{n-1} - i v_{n-1}).$$

Da der zweite Theil dieser Gleichung verschwindet, wenn man

$$x = u_1 + i v_1$$

setzt, so muß auch einer der Factoren des ersten Theiles, z. B.

$$x - \alpha_1 - \beta i_1$$

in diesem Falle verschwinden. Es ist demnach

$$\alpha_1 + \beta_1 i = u_1 + i v_1,$$

und $$x - \alpha_1 - \beta_1 i = x - u_1 - i v_1.$$

Setzt man dieses Raisonnement weiter fort, so wird sich ergeben, daß die lineären Factoren der zweiten Theile in den Gleichungen (23) absolut dieselben sind. Es verdient noch bemerkt zu werden, daß jeder imaginäre Factor von der Form $x - \alpha - \beta i$ sich in einen reellen $x - \alpha$ verwandelt, wenn $\beta = 0$ ist.

Da der erste Theil der Gleichung (1) sich, wie gezeigt worden ist, in lineäre Factoren nur auf eine Weise zerlegen läßt, so kann er nur verschwinden, wenn einer dieser Factoren verschwindet. Setzt man daher einen nach dem andern gleich Null, so erhält man sämmtliche Werthe von x, welche der Gleichung (1) Genüge leisten, d. h. sämmtliche Wurzeln dieser Gleichung. Die Anzahl dieser Wurzeln ist, so wie die der lineären Factoren, n. Es entspricht ferner jedem reellen Factor von der Form $x - \alpha$ eine reelle Wurzel α, und jedem imaginären Factor von der Form $x - \alpha - \beta i$ eine imaginäre Wurzel $\alpha + \beta i$. Diese Bemerkungen führen uns auf folgenden Satz:

Lehrsatz 3. Die Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

(wo die Constanten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ beliebige reelle oder imaginäre Werthe haben können) hat immer n reelle oder imaginäre Wurzeln; kann deren aber nicht mehr haben.

Die Gleichung (1) kann mehrere unter sich gleiche Wurzeln haben. In diesem Falle ist die Anzahl der verschiedenen Werthe von x, welche der Gleichung Genüge leisten, nothwendig kleiner als n. So hat z. B. die Gleichung vom zweiten Grade

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

zwei gleiche Wurzeln, und man wird ihr durch einen einzigen Werth von x, nämlich durch

$$x = a,$$

Genüge leisten können.

Sind die Constanten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ alle reell, so kann der imaginäre Ausdruck

$$\alpha + \beta i$$

offenbar nicht eine Wurzel der Gleichung (1) sein, ohne daß der conjugirte (mit ihm gepaarte) Ausdruck

$$\alpha - \beta i$$

eine Wurzel ebenderselben Gleichung ist. Es sind demnach in diesem Falle die imaginären lineären Factoren des Polynoms, welches den ersten Theil der Gleichung (1) bildet, zu 2 und 2 gepaart und von der Form

$$x - \alpha - \beta i, \quad x - \alpha + \beta i.$$

Da das Product zweier gepaarten Factoren dieser Art ein reelles Polynom vom zweiten Grade von der Form

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2$$

ist, so folgt aus der so eben gemachten Bemerkung folgender Satz:

Lehrsatz 4. Das Polynom

$$(24) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

(wo die Constanten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ beliebige reelle Werthe haben können), läßt sich in reelle Factoren vom ersten oder zweiten Grade zerlegen.

Wir haben den imaginären Wurzeln der Gleichung (1) die Form

$$\alpha \pm \beta i$$

gegeben. Alsdann war ein reeller Factor vom zweiten Grade, welcher zweien gepaarten imaginären Wurzeln

$$\alpha + \beta i, \quad \alpha - \beta i$$

correspondirt, von der Form

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2.$$

Setzt man der Bequemlichkeit wegen

$$\alpha \pm \beta i = \varrho (\cos. \theta \pm i \sin. \theta)$$

(wo ϱ eine positive Größe, θ aber einen Winkel bedeutet, von welchem man annehmen kann, daß er zwischen den Grenzen 0 und π liegt), so wird eben dieser reelle Factor vom zweiten Grade

$$(x - \varrho \cos. \theta)^2 + (\varrho \sin. \theta)^2$$
$$= x^2 - 2\varrho x \cos. \theta + \varrho^2.$$

Dieser Ausdruck läßt sich leicht geometrisch construiren, wenn x reell ist. Wenn man nämlich ein Dreieck zeichnet,

dessen einer Winkel θ ist, und in welchem die diesen Winkel einschließenden Seiten x und ϱ zu Maßen haben, so ist das Quadrat der dritten Seite, nach einem bekannten Lehrsatze der Trigonometrie, dem Trinom

$$x^2 - 2\varrho x \cos.\theta + \varrho^2$$

gleich, wenn x positiv ist. Ist dagegen x negativ, so darf man in der erwähnten Construction nur anstatt des Winkels θ dessen Supplement nehmen.

Die dritte Seite des erwähnten Dreiecks kann nur dann verschwinden, wenn die beiden ersten Seiten in eine gerade Linie fallen, und wenn ihre Endpuncte zusammenfallen; dann aber muß 1) der Winkel θ sich auf Null oder π reduciren, und 2) der Werth von $x = \varrho$ sein. Der Factor

$$x^2 - 2\varrho x \cos.\theta + \varrho^2$$

kann demnach für einen reellen Werth von x nur dann Null werden, wenn man

$$\cos.\theta = 1 \text{ oder } \cos.\theta = -1$$

setzt, und der einzige Werth von x, für welchen jener Factor verschwindet, ist im ersten Falle

$$x = \varrho,$$

im zweiten Falle

$$x = -\varrho.$$

Man erhält diese Resultate direct, wenn man erwägt, daß die Gleichung

$$x^2 - 2\varrho x \cos.\theta + \varrho^2$$

die beiden Wurzeln

$$\varrho(\cos.\theta + i \sin.\theta),\ \varrho(\cos.\theta - i \sin.\theta)$$

hat, welche nur dann imaginär zu sein aufhören, wenn

$$\sin.\theta = 0$$

wird. In diesem Falle ist aber

$$\cos.\theta = \pm 1,$$

mithin

$$x = \pm \varrho,$$

wobei noch zu bemerken ist, daß beide Wurzeln der Gleichung einander gleich sind.

Wir haben uns bisher darauf beschränkt, die Anzahl der Wurzeln der Gleichung (1), so wie auch ihre Form und die der correspondirenden Factoren der Gleichung zu bestimmen. Wir wollen in den folgenden Paragraphen einige besondere Fälle betrachten, in welchen man höhere Gleichungen aufzulösen im Stande ist, ohne daß ihre Coefficienten in bestimmten Zahlen gegeben zu sein brauchen; in welchen Fällen die Wurzeln in Form algebraischer oder trigonometrischer Functionen dieser Coefficienten ausgedrückt werden können. Wir bemerken noch in Beziehung auf diesen Gegenstand, daß in einer jeden algebraischen Gleichung, deren erster Theil eine rationale und ganze Function von x ist, der Coefficient von x auf die Einheit reducirt werden kann; und eben so kann der Coefficient der nächstniedrigen Potenz durch eine Transformation auf Null reducirt werden. Wenn nämlich in der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

a_0 nicht gleich 1 ist, so darf man nur die Gleichung durch a_0 dividiren, um den Coefficienten von x^n auf Eins zu reduciren, und wenn in einer Gleichung von der Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

a_1 nicht Null ist, darf man nur

$$x = z - \frac{a_1}{n}$$

setzen, so verwandelt sich die Gleichung in eine andere (in z) von demselben Grade, in welcher das zweite Glied fehlt, d. h. in eine Gleichung, in welcher der Coefficient von z^{n-1} verschwindet.

§. 2. Algebraische oder trigonometrische Auflösung der binomischen und einiger trinomischen Gleichungen. Lehrsätze von Moivre und Cotes.

Wir wollen die binomische Gleichung

(1) $$x^n + p = 0$$

betrachten, wo p eine constante Größe bedeutet. Hieraus ergibt sich

$$x^n = -p,$$

oder, wenn man den Zahlenwerth von p durch ϱ bezeichnet,

$$x^n = \pm \varrho.$$

Man hat demnach die Gleichung

$$x^n = \varrho \tag{2}$$

aufzulösen, wenn — p positiv ist; die Gleichung

$$x^n = -\varrho, \tag{3}$$

wenn — p negativ ist. Der ersten leistet man Genüge, wenn man

$$x = ((\varrho))^{\frac{1}{n}} = \varrho^{\frac{1}{n}} ((1))^{\frac{1}{n}} \tag{4}$$

setzt; bei der zweiten hingegen wird man

$$x = ((-\varrho))^{\frac{1}{n}} = \varrho^{\frac{1}{n}} ((-1))^{\frac{1}{n}} \tag{5}$$

zu setzen haben. Was die verschiedenen Werthe der beiden Ausdrücke $((1))^{\frac{1}{n}}$, $((-1))^{\frac{1}{n}}$ betrifft, so beträgt ihre Anzahl immer n (Cap. 7., §. 3.), und sie werden aus den beiden Formeln

$$(6)\begin{cases} ((1))^{\frac{1}{n}} = \cos. \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin. \frac{2k\pi}{n} \\ ((-1))^{\frac{1}{n}} = \cos. \frac{(2k+1)\pi}{n} \pm i \sin. \frac{(2k\pi)}{n}, \end{cases}$$

in welchen man für k successive alle ganzen Werthe zu setzen hat, welche $\frac{n}{2}$ nicht übersteigen, gefunden. Ist n eine gerade Zahl, so liefert die erste der Gleichungen zwei reelle Werthe von $((1))^{\frac{1}{n}}$, und zwar $+1$ und -1, wovon der eine dem $k = 0$, der andere dem $k = \frac{m}{2}$ correspondirt. In diesem Falle sind sämmtliche Werthe von $((-1))^{\frac{1}{n}}$ imaginär. — Ist n eine ungerade Zahl, so hat der Ausdruck $((1))^{\frac{1}{n}}$ einen einzigen reellen Werth, welcher dem $k = 0$ entspricht; der Ausdruck $((-1))^{\frac{1}{n}}$ dagegen einen einzigen reellen Werth -1, welcher

dem $k = \frac{n-1}{2}$ entspricht. Die Gleichung (1) hat demnach zwei reelle Wurzeln, oder gar keine, wenn n eine gerade Zahl ist; eine reelle Wurzel hingegen, wenn n eine ungerade Zahl ist. Der bloße Anblick der Formeln (6) zeigt übrigens sofort, daß die imaginären Wurzeln paarweise vorhanden sind, was man auch erwarten konnte.

Wir wollen nun die trinomische Gleichung

(7) $$x^{2n} + px^n + q = 0, \text{ oder}$$
$$x^{2n} + px^n = -q$$

betrachten, wo p, q zwei beliebige constante Größen sind. Aus (7) erhält man

(8) $$\left(x^n + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Ist $p^2 - q$ positiv, so folgt aus (8)

$$x^n + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$

oder $$x^n + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)};$$

die Größe x^n läßt mithin zwei Werthe zu, welche durch die Formel

(9) $$x^n = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$

gegeben sind. — Ist $n = 1$, so liefert die Formel (9) unmittelbar die beiden reellen Wurzeln der trinomischen Gleichung vom zweiten Grade

(10) $$x^2 + px + q = 0.$$

Im entgegengesetzten Falle hat man noch zwei binomische Gleichungen, nämlich

$$x^n = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$

und $$x^n = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$

aufzulösen, welche denjenigen ähnlich sind, mit denen wir uns weiter oben beschäftigt haben. —

Ist $\frac{p^2}{4} - q$ negativ, so ergibt sich aus (8)

$$x^n + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)} \cdot i$$

$$x^n + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)} \cdot i$$

oder

$$(11) \qquad x^n = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(p - \frac{p^2}{4}\right)} \cdot i.$$

x^n hat also in diesem Falle zwei imaginäre Werthe. Ist $n = 1$, so sind diese Werthe die imaginären Wurzeln der Gleichung (10). Ist hingegen $n > 1$, so hat man noch aus den nunmehr bekannten Werthen von x^n die Werthe von x abzuleiten. Wir wollen in diesem Falle durch ϱ den Modulus des imaginären Ausdrucks bezeichnen, welcher dem zweiten Theile in der Formel (11) gleich ist, so hat man offenbar

$$(12) \qquad \varrho = q^{\frac{1}{2}}.$$

Uebrigens wollen wir auch noch der Bequemlichkeit wegen

$$(13) \qquad \zeta = \text{arc. tang.} \frac{\sqrt{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)}}{\left(-\frac{p}{2}\right)}$$

setzen. — Ist p negativ, so verwandeln sich die beiden durch die Formel (11) gegebenen Werthe von x^n in

$$(14) \qquad x^n = \varrho\,(\cos.\,\zeta \pm i \sin.\,\zeta),$$

woraus sich ergibt

$$(15) \qquad x = \varrho^{\frac{1}{n}}\left(\cos.\frac{\zeta}{n} \pm i \sin.\frac{\zeta}{n}\right)((1))^{\frac{1}{m}}.$$

Ist hingegen p positiv, so findet man

$$(16) \qquad x^n = -\varrho\,(\cos.\,\zeta \pm i \sin.\,\zeta) \text{ und}$$

$$(17) \qquad x = \varrho^{\frac{1}{n}}\left(\cos.\frac{\zeta}{n} \pm i \sin.\frac{\zeta}{n}\right)((-1))^{\frac{1}{n}}.$$

In dem besonderen Fall, wo

$$\frac{p^2}{4} - q = 0$$

ist, wird $\zeta = 0$, und die Gleichungen (15) und (17) nehmen alsdann die Form der Gleichungen (4) und (5) an.

Bezeichnet man der Kürze wegen $\varrho^{\frac{1}{n}}$ durch r, so erhält man aus (12) und (13), wenn p negativ ist,

$$p = -2r^n \cos.\zeta,\ q = r^{2n}$$

$$x^{2n} + px^n + q = x^{2n} - 2r^n x^n \cos.\zeta + r^{2n}.$$

Aus der Formel (15) ergibt sich in diesem Falle

$$x = r\left(\cos.\frac{\zeta}{n} \pm i \sin.\frac{\zeta}{n}\right)\left(\cos.\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin.\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$= r\left(\cos.\frac{\zeta \pm 2k\pi}{n} \pm i \sin.\frac{\zeta \pm 2k\pi}{n}\right),$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet; woraus man denn ersieht, daß sich das Trinom

$$x^{2n} - 2r^n x^n \cos.\zeta + r^{2n}$$

in Factoren vom zweiten Grade und von der Form

$$x^2 - 2rx \cos.\frac{\zeta \pm 2k\pi}{n} + r^2$$

zerlegen läßt. —

Ist hingegen p positiv, so verwandelt sich das Trinom $x^{2n} + px^n + q$ in

$$x^{2n} + 2r^n x^n \cos.\zeta + r^{2n},$$

und seine reellen Factoren vom zweiten Grade sind dann von der Form

$$x^2 - 2rx \cos.\frac{\zeta \pm (2k+1)\pi}{n} + r^2.$$

In beiden Fällen kann man die reellen Factoren vom zweiten Grade nach der oben (§. 1.) angegebenen Methode geometrisch construiren, so oft x reelle Werthe hat. Macht man bei allen Dreiecken, welche den verschiedenen Factoren entsprechen, die Seite x zur Grundlinie; läßt man alle diese Grundlinien in eine und dieselbe gerade Linie fallen, wobei überdies der eine Endpunct allen gemeinschaftlich sein muß, und läßt man endlich bei allen Dreiecken in diesem Puncte die Grundlinie und die ganz bekannte Seite r sich schneiden, so findet man,

daß die Spitzen der verschiedenen Dreiecke mit den Theilpuncten einer in gleiche Theile getheilten und mit dem Radius r beschriebenen Kreisperipherie zusammenfallen. Multiplicirt man ferner die Quadrate der von dem andern, veränderlichen Endpuncte der Grundlinie nach der correspondirenden Spitze gezogenen geraden Linien mit einander, so ist das Product dieser Quadrate dem Trinom

$$x^{2n} + px^n + q = x^{2n} \pm 2r^n x^n \cos. \zeta + r^{2n}$$

gleich.

Ist $\zeta = 0$, so gibt das Product jener Linien selbst den Zahlenwerth des Binoms

$$x^n \pm r^n,$$

welcher der positiven Quadratwurzel des Trinoms

$$x^{2n} \pm 2r^n x^n + r^{2n}$$

gleich ist. — Der erste der so eben angeführten Sätze ist der Lehrsatz von Moivre, der zweite der von Cotes.

§. 3. Algebraische oder trigonometrische Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades.

Die allgemeine Gleichung des dritten Grades kann man durch Wegschaffung des zweiten Gliedes auf die Form

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0$$

bringen, wo p und q zwei Constanten bedeuten. Setzt man hierauf

$$x = u + v,$$

wo u, v zwei neue Veränderliche (Unbekannte) sind, so erhält man

$$x^3 = (u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv \,.\, x$$

$$(2) \qquad x^3 - 3uv \,.\, x - (u^3 + v^3) = 0.$$

Soll die Gleichung (2) mit (1) identisch sein, so darf man nur

$$(3) \qquad u^3 + v^3 = -q$$

$$(4) \qquad uv = -\frac{p}{3}$$

setzen. Die Auflösung von (1) ist demnach auf die simultane Auflösung von (3) und (4) zurückgeführt.

Wir wollen zuvörderst die Werthe von u^3 und v^3 suchen. Setzt man

(5) $$u^3 = z_1, \quad v^3 = z_2,$$

so erhält man nach (3) und (4)

$$z_1 + z_2 = -q, \quad z_1 z_2 = -\frac{p^3}{27},$$

mithin, wenn z eine neue Veränderliche ist,

$$(z - z_1)(z - z\ ) = z^2 + qz - \frac{p^3}{27}.$$

Hieraus folgt, daß z_1 und z_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

(6) $$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

sind. Da diese beiden Wurzeln bekannt sind, so wird man aus (5) die drei Werthe von u und von v herleiten können, welche einander paarweise dergestalt correspondiren müssen, daß der Formel (4) Genüge geleistet wird. Es sei nun U einer der drei Werthe von u, und V der correspondirende Werth von v, mithin

$$UV = -\frac{p}{3}.$$

Bezeichnet man den imaginären Ausdruck

$$\cos.\frac{2\pi}{3} + i \sin.\frac{2\pi}{3}$$

durch α, so sind die drei Werthe von $((1))^{\frac{1}{3}}$ respective

$$\alpha^0 = 1,$$

$$\alpha = \cos.\frac{2\pi}{3} + i \sin.\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{3^{\frac{1}{2}} . i}{2}$$

$$\alpha^2 = \cos.\frac{2\pi}{3} - i \sin.\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{3^{\frac{1}{2}} . i}{2},$$

und die drei, durch die allgemeine Formel $((1))^{\frac{1}{3}}$ gegebenen Werthe von u sind offenbar

$$U,\ \alpha U,\ \alpha^2 U.$$

Die correspondirenden Werthe von v sind

$$V,\ \frac{V}{\alpha},\ \frac{V}{\alpha^2},$$

oder, was dasselbe ist,

$$V,\ \alpha^2 V,\ \alpha V.$$

Nennt man daher die drei Wurzeln von (1), x_0, x_1, x_2, so ist

$$(7)\quad \begin{cases} x_0 = U + V, \\ x_1 = \alpha U + \alpha^2 V, \\ x_2 = \alpha^2 U + \alpha V. \end{cases}$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Wurzeln x_0, x_1, x_2 respective den drei Werthen von x, welche die Formel

$$(8)\quad x = ((z_1))^{\frac{1}{3}} - \frac{p}{3((z_1))^{\frac{1}{3}}}$$

gibt, gleich sind, indem U, αU, $\alpha^2 U$ die drei Werthe von $u = ((z_1))^{\frac{1}{3}}$, und V, $\alpha^2 V$, αV die correspondirenden Werthe von $v = -\frac{p}{3((z_1))^{\frac{1}{3}}}$ sind.

Sind die Wurzeln der Gleichung (6) reell, so liefern die Formeln (5) ein System von reellen Werthen von u und v, welche einander dergestalt correspondiren, daß der Gleichung (4) Genüge geleistet wird. Nennt man diese beiden Werthe U und V, so ist es klar, daß die erste von den drei Wurzeln x_0, x_1, x_2 nothwendig reell ist, und daß die beiden andern reell oder imaginär sein werden, je nachdem die Größe

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

Null oder positiv ist, d. h. je nachdem die Wurzeln der Gleichung (6) gleich oder ungleich sind. Im ersten Falle findet man

$$x_0 = 2U,\ x_1 = x_2 = -U.$$

Sind die beiden Wurzeln der Gleichung (6) imaginär, so lassen sie sich unter die Form

$z_1 = \varrho(\cos.\theta + i \sin.\theta)$, $z_2 = \varrho(\cos.\theta - i \sin.\theta)$

bringen, wo der Modulus ϱ durch die Gleichung

$$\varrho^2 = -\frac{p^3}{27}$$

gegeben ist.

Da in diesem Falle

$$((z_1))^{\frac{1}{3}} = \varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos.\frac{\theta}{3} + i \sin.\frac{\theta}{3}\right)((1))^{\frac{1}{3}}$$

ist, so reducirt sich die Formel (8) auf

(9) $$x = \varrho^{\frac{1}{3}}\left[\left(\cos.\frac{\theta}{3} + i \sin.\frac{\theta}{3}\right)((1))^{\frac{1}{3}} + \left(\cos.\frac{\theta}{3} - i \sin.\frac{\theta}{3}\right)\frac{1}{((1))^{\frac{1}{3}}}\right].$$

Setzt man nun für U den imaginären Ausdruck

$$\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos.\frac{\theta}{3} + i \sin.\frac{\theta}{3}\right),$$

so ergibt sich aus (7)

(10)
$$\begin{cases} x_0 = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos.\frac{\theta}{3}, \\ x_1 = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos.\frac{\theta + 2\pi}{3} \\ x_2 = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos.\frac{\theta - 2\pi}{3}. \end{cases}$$

Alle diese drei Werthe sind reell und stimmen mit denen überein, welche man aus (9) erhält.

Die Gleichung (6) von deren Auflösung die der Gleichung (1) abhängt, nennt man die reducirte. Ihre Wurzeln sind nothwendigerweise gewissen Functionen der gesuchten Wurzeln x_0, x_1, x_2 gleich. Um diese Functionen zu bestimmen, darf man sich nur daran erinnern, daß U und V besondere Werthe von u und v sind, und daß mithin nach (5)

$$z_1 = U^3, \quad z_2 = V^3$$

sein muß. Ferner erhält man aus (7)

$$3U = x_0 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_1 = \alpha(x_2 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_0)$$
$$= \alpha^2(x_1 + \alpha x_0 + \alpha^2 x_2),$$
$$3V = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 = \alpha(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_0)$$
$$= \alpha^2(x_2 + \alpha x_0 + \alpha^2 x_1);$$

mithin ist

$$(11)\begin{cases} 27 z_1 = (x_0 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_1)^3 = (x_2 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_0)^3 \\ \qquad = (x_1 + \alpha x_0 + \alpha^2 x_2)^3 \\ 27 z_2 = (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2)^3 = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_0)^3 \\ \qquad = (x_2 + \alpha x_0 + \alpha^2 x_1)^3 \end{cases}$$

Hieraus folgt, daß z_1, z_2 (einen Zahlencoefficienten abgerechnet) den beiden einzigen von einander verschiedenen Werthen gleich sind, welche der Cubus von

$$x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2$$

erhält, wenn man in dieser Function die Wurzeln x_0, x_1, x_2 auf alle möglichen Arten unter einander versetzt. Der erwähnte Zahlencoefficient ist offenbar $\frac{1}{27}$, oder der Cubus von $\frac{1}{3}$.

Wir wollen gegenwärtig die allgemeine Gleichung vom vierten Grade betrachten, welche durch Wegschaffung des zweiten Gliedes unter die Form

$$(12) \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

gebracht werden kann, und wo p, q, r Constanten bedeuten. — Setzt man

$$x = u + v + w,$$

wo u, v, w drei neue Veränderliche sind, so erhält man

$$x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw),$$

mithin

$$[x^2 - (u^2 + v^2 + w^2)]^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw.x,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(13)\begin{cases} x^4 - 2(u^2+v^2+w^2)x^2 - 8uvw.x + (u^2+v^2+w^2)^2 \\ -4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = 0. \end{cases}$$

Soll diese Gleichung mit der vorgelegten identisch sein, so darf man nur

$$(14)\begin{cases} 4(u^2+v^2+w^2)=-2p, \\ 8uvw=-q, \\ 16(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)=p^2-4r \end{cases}$$

setzen. Die Auflösung von (12) ist also auf die simultane Auflösung der Gleichungen (14) zurückgeführt.

Wir wollen zuvörderst die Werthe von $4u^2$, $4v^2$, $4w^2$ suchen. Setzt man

$$(15) \qquad 4u^2=z_1,\ 4v^2=z_2,\ 4w^2=z_3,$$

so ist nach (14)

$$z_1+z_2+z_3=-2p,\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z=p^2-4r,$$
$$z_1z_2z_3=q^2;$$

mithin, wenn man unter z eine neue Veränderliche versteht,

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0,$$

und hieraus folgt, daß z_1, z_2, z_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$(16) \qquad z_3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$$

sein werden, und da diese drei Wurzeln der Formel $z_1z_2z_3=q^2$ Genüge leisten müssen, so wird eine derselben positiv sein, die beiden andern hingegen entweder beide zugleich positiv, oder negativ, oder imaginär.

Hat man diese Wurzeln bestimmt, so liefern die beiden ersten Gleichungen (15) für jede der Veränderlichen u und v zwei, vom Zeichen abgesehen, gleiche Werthe. Es seien

$$u=\pm U,\ v=\pm V$$

diese reellen oder imaginären Werthe, und W ein reeller oder imaginärer Ausdruck, welcher durch die Gleichung

$$8UVW=-q$$

bestimmt wird. Setzt man nun in (14) (2te Formel)

$$u=+U,\ v=+V,$$

oder

$$u=-U,\ V=-V,$$

so erhält man

$$w=+W.$$

Setzt man hingegen

$$u = +U,\ v = -V$$

oder

$$u = -U,\ v = +V,$$

so findet man

$$w = -W.$$

Auf diese Weise erhält man für die Veränderlichen u, v, w vier Systeme von Werthen, vermittelst deren man den Gleichungen (14) Genüge leisten kann. Bezeichnet man daher die vier correspondirenden Werthe von

$$x = u + v + w$$

durch x_0, x_1, x_2, x_3, so hat man

$$(17)\quad \begin{cases} x_0 = U + V + W, \\ x_1 = -U - V + W, \\ x_2 = U - V - W, \\ x_3 = -U + V - W. \end{cases}$$

Es ist leicht einzusehen, daß diese vier Werthe von x alle reell sein werden, wenn die drei Wurzeln der Gleichung (16) positiv sind; und alle imaginär, wenn (16) zwei ungleiche negative Wurzeln hat. Dagegen werden zwei Wurzeln reell, die beiden andern hingegen imaginär sein, wenn die Gleichung (16) zwei gleiche negative oder zwei imaginäre Wurzeln hat.

Nach der so eben entwickelten Methode wird die Auflösung der Gleichung (12) auf die der Gleichung (16) zurückgeführt. Diese letztere, welche man die reducirte nennt, hat nothwendigerweise gewisse Functionen der Wurzeln x_0, x_1, x_2, x_3 zu Wurzeln. Will man diese Functionen bestimmen, d. h. will man z_1, z_2, z_3 durch x_0, x_1, x_2, x_3 ausdrücken, so darf man sich nur daran erinnern, daß U, V, W besondere Werthe von u, v, w sind, und daß nach (15)

$$z_1 = 4U^2,\ z_2 = 4V^2,\ z_3 = 4W^2$$

ist. Ferner erhält man aus (17)

$$4U = x_0 - x_1 + x_2 - x_3,$$
$$4V = x_0 - x_1 + x_3 - x_2,$$
$$4W = x_0 - x_2 + x_1 - x_3;$$

mithin iſt

$$(18)\quad \begin{cases} 4z_1 = (x_0 - x_1 + x_2 - x_3)^2 = (x_1 - x_0 + x_3 - x_2)^2, \\ 4z_2 = (x_0 - x_1 + x_3 - x_2)^2 = (x_1 - x_0 + x_2 - x_3)^2, \\ 4z_3 = (x_0 - x_2 + x_1 - x_3)^2 = (x_2 - x_0 + x_3 - x_1)^2. \end{cases}$$

Anmerkung. Da die lineäre Function $x_0 - x_1 + x_2 - x_3$ auch unter die Form

$$x_0 + (-1)\,x_1 + (-1)^2\,x_2 + (-1)^3\,x_3$$

gebracht werden kann, ſo iſt dieſelbe offenbar nur ein beſonderer Fall von der allgemeinen Formel

$$x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3,$$

wenn man unter α einen von den Werthen des Ausdrucks $((1))^{\frac{1}{4}}$ verſteht.

Elftes Capitel.

Zerlegung der rationalen Brüche.

§. 1. Zerlegung einer rationalen gebrochenen Function in zwei andere Functionen derselben Art.

Es seien $f(x)$ und $F(x)$ zwei ganze Functionen von x, so ist

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

ein rationaler Bruch. Ist sein Nenner $F(x)$ vom m^{ten} Grade, so hat die Gleichung

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

m reelle oder imaginäre, gleiche oder ungleiche Wurzeln. Nimmt man zuvörderst an, alle diese Wurzeln seien ungleich, und bezeichnet man sie durch $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$, so werden die lineären Factoren des Polynoms $F(x)$ respective

$$x - x_0,\ x - x_1,\ x - x_2,\ \ldots,\ x - x_{m-1}$$

sein. Es sei nun

$$F(x) = (x - x_0)\,\varphi(x), \tag{2}$$

und

$$\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = A. \tag{3}$$

Ist $\varphi(x_0)$ nicht Null, so wird die Constante A endlich sein, und die Differenz

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A = \frac{f(x) - A\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

wird für $x = x_0$ verschwinden. Dasselbe wird also auch bei dem Polynom

$$f(x) - A\varphi(x)$$

der Fall sein, und dieses Polynom wird durch $x - x_0$ algebraisch theilbar sein. Es ist demnach

$$f(x) - A\varphi(x) = (x - x_0)\chi(x)$$

und

$$(4) \qquad f(x) = A\varphi(x) + (x - x_0)\chi(x),$$

wo $\chi(x)$ eine neue ganze Function von x bedeutet. Dividirt man beide Theile der letzten Gleichung durch $F(x)$, oder vielmehr den ersten Theil durch $F(x)$, den zweiten dagegen durch den Werth dieser Function, welchen man aus (2) erhält, so findet man

$$(5) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}.$$

Theilt man also das Polynom $F(x)$ in zwei Factoren, von welchen der eine lineär ist, so kann man den rationalen Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ in zwei andere Brüche zerlegen, deren respective Nenner die beiden erwähnten Factoren sind, und der einfachste von beiden erhält alsdann einen constanten Zähler. Gesetzt, es solle die Function $F(x)$ in zwei Factoren zerlegt werden, von welchen der erste, statt lineär zu sein, mehreren Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ entsprechen soll, so wollen wir zuvörderst den Fall betrachten, wo dieser erste Factor der Factor vom zweiten Grade

$$(x - x_0)(x - x_1)$$

ist. Setzt man daher

$$(6) \qquad F(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \varphi(x),$$

so wird der Bruch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nicht allein für $x = x_0$, sondern auch für $x_1 = x$ einen endlichen Werth behalten. Bezeichnet

man daher durch u ein Polynom vom ersten Grade, welches in beiden Fällen gleich $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ist, so findet man nach Cap. 4., §. 1.

$$(7) \quad u = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Da das Polynom u auf die angegebene Weise bestimmt worden ist, so wird die Gleichung

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - u = 0$$

oder

$$f(x) - u\varphi(x) = 0$$

unter andern auch die Wurzeln x_0 und x_1 haben, mithin ist das Polynom

$$f(x) - u\varphi(x)$$

durch das Product $(x - x_0)(x - x_1)$ theilbar. Es ist demnach

$$f(x) - u\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \chi(x),$$

oder

$$(8) \quad f(x) = u\varphi(x) + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \chi(x),$$

wo $\chi(x)$ eine neue ganze Function von x bedeutet. Dividirt man die beiden Theile der letzten Gleichung durch die gleichvielsten Theile von (6), so findet man

$$(9) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{u}{(x - x_0)(x - x_1)} + \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}.$$

Eben so läßt sich beweisen, daß man nur

$$(10) \quad F(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot \varphi(x)$$

und

$$(11) \quad \begin{cases} u = \\ \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ + \frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{cases}$$

setzen darf, um eine Gleichung von der Form

$$(12) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{u}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} + \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$$

zu erhalten. etc..... Wenn daher die Gleichung $F(x) = 0$ keine gleichen Wurzeln hat, und man theilt das Polynom

$F(x)$ in zwei Factoren, von welchen der erste das Product mehrerer lineären Factoren ist, so läßt sich der rationale Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ in zwei andere Brüche derselben Art zerlegen, deren Nenner die beiden erwähnten Factoren sind, und von welchen der erste einen Zähler von einem niedrigeren Grade als der Nenner haben wird.

Ich gehe nun zu dem Falle über, in welchem die Gleichung $F(x) = 0$ gleiche Wurzeln hat. Es seien in diesem Falle

$$a, b, c, \ldots.$$

die verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung; m' die Anzahl derjenigen Wurzeln, welche gleich a sind, m'' die Anzahl derer, welche gleich b sind; m''' die Anzahl derjenigen, welche gleich c sind, etc....., so wird entweder die Function

$$F(x) = (x-a)^{m'} \cdot (x-b)^{m''} \cdot (x-c)^{m'''} \ldots.$$

sein, oder sie ist diesem Producte, multiplicirt mit einem constanten Coefficienten gleich, und es wird sein

$$m' + m'' + m''' + \text{etc.}\ldots = m.$$

Es sei nun

$$F(x) = (x-a)^{m'} \cdot \varphi(x) \tag{13}$$

und

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = A. \tag{14}$$

Ist $\varphi(a)$ nicht Null, so ist die Constante A endlich, und die Differenz

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A$$

wird für $x = a$ verschwinden. Hieraus folgt, daß das Polynom

$$f(x) - A\varphi(x)$$

durch $x - a$ theilbar ist; man hat demnach

$$f(x) = A\varphi(x) + (x-a)\chi(x), \tag{15}$$

wo $\chi(x)$ eine neue ganze Function von x ist. Dividirt man endlich jeden der beiden Theile von (15) durch den correspondirenden von (13), so findet man

$$(16)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^{m'}} + \frac{\chi(x)}{(x-a)^{m'-1}.\varphi(x)}.$$

Durch ein ähnliches Raisonnement würde man darthun, daß man nur

$$(17)\qquad F(x) = (x-a)^{m'}.(x-b)^{m''}.\varphi(x)$$

und

$$(18)\qquad u = \frac{f(a)}{\varphi(a)}.\frac{x-b}{a-b} + \frac{f(b)}{\varphi(b)}.\frac{x-a}{b-a}$$

zu setzen braucht, um eine Gleichung von der Form

$$(19)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{u}{(x-a)^{m'}(x-b)^{m''}} + \frac{\chi(x)}{(x-a)^{m'-1}.(x-b)^{m''-1}.\varphi(x)}$$

zu erhalten, etc....

§. 2. Zerlegung eines rationalen Bruches, dessen Nenner das Product mehrerer ungleichen lineären Factoren ist, in einfache Brüche, welche diese lineären Factoren zu ihren respectiven Nennern haben, und deren Zähler constant sind.

Es sei

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

der rationale Bruch, welchen wir betrachten wollen, und

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots.\ x_{m-1}$$

die Wurzeln der Gleichung

$$(1)\qquad F(x) = 0,$$

von welchen wir annehmen, sie seien ungleich; so ist, wenn k einen constanten Coefficienten bedeutet,

$$(2)\qquad F(x) = k(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{m-1}),$$

und der rationale Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ wird nach dem Vorigen in zwei andere zerlegt werden können, von welchen der erste von der Form

$$\frac{A_0}{x-x_0}$$

sein wird, wo A_0 eine Constante ist, während der Nenner des zweiten

$$\frac{F(x)}{x-x_0} = k(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})$$

ist. Zerlegt man diesen zweiten Bruch auf dieselbe Weise, so erhält man 1) einen neuen einfachen Bruch von der Form

$$\frac{A_1}{x-x_1},$$

2) einen Bruch, dessen Nenner

$$k(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})$$

ist; und fährt man so fort, so verschwinden aus dem Polynom

$$F(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{m-1})$$

nach und nach alle lineären Factoren, welche es enthält, so daß das Polynom sich auf die Constante k reduciren wird. Wenn also durch eine Reihe solcher partieller Zerlegungen, wie wir sie so eben angedeutet haben, aus dem Bruche $\frac{f(x)}{F(x)}$ eine Reihe von einfachen Brüchen von der Form

$$\frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-x_{m-1}}$$

abgeleitet worden ist, so ist der Rest zuletzt ein rationaler Bruch mit constantem Nenner, d. h. eine ganze Function von x. Bezeichnet man diese ganze Function durch R, so findet man:

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{f(x)}{F(x)} = R + \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{A_{m-1}}{x-x_{m-1}}. \end{cases}$$

Es müssen nun noch die Werthe der Constanten

$$A_0, A_1, A_2, \ldots A_{m-1}$$

bestimmt werden. Man würde diese Werthe ohne Mühe nach der im ersten Paragraphen angedeuteten Methode finden können, aber man gelangt vermittelst folgender Betrachtungen schneller zum Ziele. Multiplicirt man beide Theile der Gleichung (3) mit F (x), so erhält man

$$(4)\quad \begin{cases} f(x) = RF(x) + A_0 \dfrac{F(x)}{x-x_0} + A_1 \dfrac{F(x)}{x-x_1} \\ \qquad + A_2 \dfrac{F(x)}{x-x_2} + \ldots + A_{m-1} \dfrac{F(x)}{x-x_{m-1}}. \end{cases}$$

Setzt man in beiden Theilen dieser Formel

$$x = x_0 + z,$$

so nimmt die Summe

$$RF(x) + A_1 \frac{F(x)}{x-x_1} + A_2 \frac{F(x)}{x-x_2} + \ldots + A_{m-1} \frac{F(x)}{x-x_{m-1}},$$

welche offenbar ein durch $x - x_0$ theilbares Polynom in x ist, die Form

$$zZ$$

an, wo Z eine ganze Function von z ist, und man hat mithin

$$(5)\qquad f(x_0+z) = A_0 \frac{F(x_0+z)}{z} + zZ.$$

Gesetzt nun, man erhalte, wenn man in $F(x)$ statt x, $x+z$ substituirt,

$$(6)\quad F(x+z) = F(x) + zF_1(x) + z^2 F_2(x) + \text{etc...},$$

so ergibt sich hieraus

$$F(x_0+z) = F(x_0) + zF_1(x_0) + z^2 F_2(x_0) + \text{etc.....},$$

und die Gleichung (5) verwandelt sich in

$$f(x_0+z) = A_0 [F_1(x_0) + zF_2(x_0) + \text{etc.....}] + zZ.$$

Setzt man hierauf $z = 0$, so reducirt sie sich auf

$$f(x_0) = A_0 F_1(x_6),$$

woraus man erhält

$$(7)\qquad A_0 = \frac{f(x_0)}{F_1(x_0)}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung würde man erhalten

$$(8)\quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{f(x_1)}{F_1(x_1)}, \\ A_2 = \dfrac{f(x_2)}{F_1(x_2)} \\ \text{etc.} \ldots\ldots \\ A_{m-1} = \dfrac{f(x_{m-1})}{F_1(x_{m-1})}. \end{cases}$$

Diese Werthe von $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ sind offenbar unabhängig von dem Verfahren, dessen wir uns bei Zerlegung des rationalen Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$ bedient haben, und hieraus folgt denn, daß dieser Bruch nur auf eine einzige Art in einfache Brüche zerlegt werden kann, deren Nenner die lineären Factoren des Polynoms $F(x)$, und deren Zähler Constanten sind.

Es ist leicht einzusehen, wie es zugeht, daß die Gleichung (7) und die Formel (3) des vorhergehenden Paragraphen mit einander übereinstimmen; denn $F_1(x_0)$ ist der Werth von

$$F_1(x_0) + z F_2(x_0) + \text{etc.} \ldots = \frac{F(x_0+z)}{z} = \frac{F(x)}{x-x_0},$$

welchen man erhält, wenn man $z = 0$, oder $x = x_0$ setzt. — Setzt man demnach

$$(9) \qquad F(x) = (x-x_0) \cdot \varphi(x),$$

so hat man $F_1(x_0) = \varphi(x_0)$, und

$$(10) \qquad A_0 = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}.$$

Um obige Formeln auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir den rationalen Bruch

$$\frac{x^n}{x^m - 1}$$

in einfache Brüche zerlegen, wo n eine kleinere Zahl als m bedeuten soll.

Man hat in diesem Falle

$$f(x) = x^n, \quad F(x) = x^m - 1, \quad k = 1,$$

und wenn man durch h eine ganze Zahl bezeichnet, welche $\frac{m}{2}$ nicht übersteigt, so werden die verschiedenen und sämmtlich ungleichen Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ durch die Formel

$$\cos. \frac{2h\pi}{m} \pm i \sin. \frac{2h\pi}{m}$$

gegeben sein. Es sei a eine dieser Wurzeln, und wir wollen den Zähler A des einfachen Bruches suchen, dessen Nenner $x - a$ ist. Dieser Zähler wird

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)} = \frac{a^n}{F_1(a)}$$

sein; den Werth von $F_1(a)$ erhält man aber aus der Gleichung

$$F(a) + z F_1(a) + \text{etc.}\ldots,$$

$$= F(a+z) = (a+z)^m - 1 = a^m - 1 + m a^{m-1} z + \text{etc.}\ldots,$$

und er ist demnach $m a^{m-1}$. Man findet daher

$$A = \frac{a^n}{m a^{m-1}} = \frac{1}{m} a^{n+1-m}.$$

Da ferner

$$\left(\cos.\frac{2h\pi}{m} \pm i \sin.\frac{2h\pi}{m}\right)^{n+1-m}$$

$$= \cos.\frac{2h(n+1)\pi}{m} \pm i \sin.\frac{2h(n+1)\pi}{m}$$

ist, so erhält man, wenn man der Kürze wegen

(11) $$\frac{(n+1)\pi}{m} = \theta \text{ setzt,}$$

(12)
$$\frac{x^n}{x^m - 1} =$$
$$\frac{1}{m} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x-1} + \frac{\cos.2\theta + i\sin.2\theta}{x - \cos.\frac{2\pi}{m} - i\sin.\frac{2\pi}{m}} + \frac{\cos.2\theta - i\sin.2\theta}{x - \cos.\frac{2\pi}{m} + i\sin.\frac{2\pi}{m}} \\ + \frac{\cos 4\theta + i\sin 4\theta}{x - \cos.\frac{4\pi}{m} - i\sin.\frac{4\pi}{m}} + \frac{\cos.4\theta - i\sin.4\theta}{x - \cos.\frac{4\pi}{m} + i\sin.\frac{4\pi}{m}} \\ + \text{etc.}\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Durch ein ähnliches Raisonnement würde man finden

(13)
$$\frac{x^n}{x^m + 1} =$$
$$-\frac{1}{m} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos.\theta + i\sin.\theta}{x - \cos.\frac{\pi}{m} - i\sin.\frac{\pi}{m}} + \frac{\cos.\theta - i\sin.\theta}{x - \cos.\frac{\pi}{m} + i\sin.\frac{\pi}{m}} \\ + \frac{\cos.3\theta + i\sin.3\theta}{x - \cos.\frac{3\pi}{m} - i\sin.\frac{3\pi}{m}} + \frac{\cos.3\theta - i\sin.3\theta}{x - \cos.\frac{3\pi}{m} + i\sin.\frac{3\pi}{m}} \\ + \text{etc.}\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß der letzte unter den einfachen Brüchen, welche der zweite Theil von (12) und (13) enthält, wenn von (12) die Rede ist, für gerade Werthe von m, und wenn von (13) die Rede ist, für ungerade Werthe von m

$$\frac{\cos. m\theta}{x+1} = \frac{\cos.(n+1)\pi}{x+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{x+1}$$

sein wird. So z. B. findet man

$$(14) \qquad \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right),$$

$$(15) \qquad \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right),$$

$$(16) \qquad \frac{1}{x^3+1} =$$

$$-\frac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos.\frac{\pi}{3} + i\sin.\frac{\pi}{3}}{x - \cos.\frac{\pi}{3} - i\sin.\frac{\pi}{3}} + \dfrac{\cos.\frac{\pi}{3} - i\sin.\frac{\pi}{3}}{x - \cos.\frac{\pi}{3} + i\sin.\frac{\pi}{3}} \\ -\dfrac{1}{x+1} \end{array}\right\}$$

etc.....

Auch verdient noch bemerkt zu werden, daß wenn man im zweiten Theile von (12) oder (13) zwei einfache Brüche, welche zwei gepaarten lineären Factoren des Binoms $x^m \pm 1$ entsprechen, durch die Addition verbindet, die Summe ein neuer Bruch sein wird, welcher zum Nenner einen reellen Factor vom zweiten Grade und zum Zähler eine reelle und lineäre Function von x haben wird. So z. B. findet man, wenn $n = 2$, und $m = 3$ ist,

$$(17)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^3+1} = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2x.\cos.\frac{\pi}{3} - 2}{x^2 - 2x.\cos.\frac{\pi}{3} + 1} - \dfrac{1}{x+1}\right) \\ = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2-x}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{x+1}\right). \end{array}\right.$$

Es ist leicht, diese Betrachtung zu verallgemeinern. Gesetzt nämlich,

$$\alpha + \beta i, \quad \alpha - \beta i$$

seien zwei gepaarte Wurzeln von $F(x) = 0$, und $\frac{f(x)}{F(x)}$ der rationale Bruch, mit welchem wir es zu thun haben; gesetzt ferner, A und B seien zwei reelle Größen, und

$$\frac{f(\alpha+\beta i)}{F_1(\alpha+\beta i)} = A - Bi; \tag{18}$$

$F_1(x)$ aber bedeute auch hier den Coefficienten von z in der Entwickelung von $F(x+z)$, so ist nothwendigerweise

$$\frac{f(\alpha-\beta i)}{F_1(\alpha-\beta i)} = A + Bi.$$

Zerlegt man daher den rationalen Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$, so sind die beiden einfachen Brüche, welche den conjugirten linearen Factoren

$$x - \alpha - \beta i, \quad x - \alpha + \beta i$$

entsprechen, respective

$$\frac{A - Bi}{x - \alpha - \beta i}, \quad \frac{A + Bi}{x - \alpha + \beta i}. \tag{19}$$

Addirt man beide Brüche, so erhält man folgenden

$$\frac{2A(x-\alpha) + 2B\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}. \tag{20}$$

Dieser letztere, dessen Zähler eine reelle, lineare Function von x, und dessen Nenner ein reeller Factor (vom zweiten Grade) des Polynoms $F(x)$ ist, stimmt mit dem Bruche

$$\frac{u}{(x-x_0)(x-x_1)}$$

in §. 1., Formel (9) überein, wenn man dort

$$x_0 = \alpha + \beta i \text{ und } x_1 = \alpha - \beta i$$

setzt.

§. 3. Zerlegung eines gegebenen rationalen Bruches in andere einfachere Brüche, welche die respectiven lineären Factoren des ersteren, oder Potenzen eben jener Factoren zu Nennern, und Constanten zu Zählern haben.

Es sei

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

der rationale Bruch, welchen wir betrachten wollen, m der Grad des Polynoms F (x), und

$$a, b, c, \ldots.$$

die verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$(1) \qquad F(x) = 0,$$

so hat man, wenn k einen constanten Coefficienten, und m′, m″, m‴, etc.... mehrere ganze Zahlen bedeuten, deren Summe gleich m ist,

$$(2) \quad F(x) = k(x-a)^{m'}.(x-b)^{m''}.(x-c)^{m'''}\ldots.$$

Bedient man sich daher der im ersten Paragraphen mitgetheilten Methode, so wird man den rationalen Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ in zwei andere zerlegen, von welchen der eine von der Form

$$\frac{A}{(x-a)^{m'}}$$

sein, der andere dagegen den Nenner

$$\frac{F(x)}{x-a} = k(x-a)^{m'-1}.(x-b)^{m''}.(x-c)^{m'''}\ldots$$

haben wird. Zerlegt man diesen zweiten rationalen Bruch nach derselben Methode, so erhält man 1) einen neuen einfachen Bruch von der Form

$$\frac{A_1}{(x-a)^{m'-1}}$$

und 2) einen Bruch, dessen Nenner

$$k(x-a)^{m'-2}.(x-b)^{m''}.(x-c)^{m'''}\ldots.$$

sein wird. Fährt man so fort, so werden die verschiedenen lineären Factoren, in welche die Potenz $(x-a)^{m'}$ zerfällt, successive verschwinden, und wenn man die Reihe

$$\frac{A}{(x-a)^{m'}},\ \frac{A_1}{(x-a)^{m'-1}},\ \frac{A_2}{(x-a)^{m'-2}},\ \text{etc...},\ \frac{A_{m-1}}{x-a}$$

erhalten hat, so wird der Rest eine neue rationale Function sein, welche den Nenner

$$k(x-b)^{m''}.(x-c)^{m'''}\ldots.$$

hat. Scheidet man aus diesem Reste die einfachen Brüche

$$\frac{B}{(x-b)^{m''}},\ \frac{B_1}{(x-b)^{m''-1}},\ \frac{B_2}{(x-b)^{m''-2}},\ \text{etc....},\ \frac{B_{m''-1}}{x-b}$$

aus, so erhält man einen zweiten Rest, dessen Nenner

$$k(x-c)^{m''}\ldots.$$

sein wird. Setzt man diese Operationen so lange fort, bis $F(x)$ sich auf die Constante k reducirt, so wird der allerletzte Rest ein rationaler Bruch mit constantem Nenner sein, d. h. eine ganze Function von x. Man erhält also, wenn R diese ganze Function ist, überhaupt:

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{f(x)}{F(x)} = R + \frac{A}{(x-a)^{m'}} + \frac{A_1}{(x-a)^{m'-1}} + \ldots + \frac{A_{m'-1}}{x-a} \\ \quad + \frac{B}{(x-b)^{m''}} + \frac{B_1}{(x-b)^{m''-1}} + \ldots + \frac{B_{m''-1}}{x-b} \\ \quad + \frac{C}{(x-c)^{m'''}} + \frac{C_1}{(x-c)^{m'''-1}} + \ldots + \frac{C_{m'''-1}}{x-c} \\ \quad + \text{etc}..... \end{cases}$$

wo $A, A_1, \ldots A_{m'-1}$; $B, B_1, \ldots B_{m''-1}$;
$C, C_1, \ldots C_{m'''-1}$

Constanten bezeichnen, welche man leicht nach den im ersten Paragraphen entwickelten Principien finden kann. Sie lassen sich aber auch mit Hülfe folgender Betrachtungen direct berechnen.

Wir wollen der Bequemlichkeit wegen

$$(4)\begin{cases} R + \dfrac{B}{(x-b)^{m''}} + \dfrac{B_1}{(x-b)^{m''-1}} + \ldots + \dfrac{B_{m''-1}}{x-b} \\ + \dfrac{C}{(x-c)^{m'''}} + \dfrac{C_1}{(x-c)^{m'''-1}} + \ldots + \dfrac{C_{m'''-1}}{x-c} \\ + \text{etc.} \ldots\ldots \\ = \dfrac{Q}{(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\ldots} \end{cases}$$

setzen, so wird Q eine neue ganze Function von x sein, und die Gleichung (3) wird sich verwandeln in

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^{m'}} + \frac{A_1}{(x-a)^{m'-1}} + \ldots + \frac{A_{m'-1}}{x-a} + \frac{Q}{(x-b)^{m''}.(x-c)^{m'''}\ldots}.$$

Multiplicirt man beide Theile dieser Gleichung mit

$$F(x) = k(x-a)^{m'}.(x-b)^{m''}..(x-c)^{m'''}\ldots,$$

so erhält man

$$(5)\begin{cases} f(x) = \\ [A + A_1(x-a) + \ldots + A_{m'-1}.(x-a)^{m'-1}].\dfrac{F(x)}{(x-a)^{m'}} \\ + kQ(x-a)^{m'}, \end{cases}$$

und setzt man

$$x = a + z,$$

so findet man

$$(6)\begin{cases} f(a+z) = [A + A_1 z + \ldots + A_{m'-1}.z^{m'-1}].\dfrac{F(a+z)}{z^{m'}} \\ + z^{m'}.Z, \end{cases}$$

wo Z den Werth des Polynoms kQ, als Function von z ausgedrückt, bedeutet. Angenommen nun, daß die Substitution von $x+z$, für x, in $f(x)$ und $F(x)$ allgemein

$$(7)\begin{cases} f(x+z) = f(x) + z f_1(x) + z^2 f_2(x) + \text{etc.}\ldots, \\ F(x+z) = F(x) + z F_1(x) + z^2.F_2(x) + \ldots. \\ + z^{m'} F_{m'}(x) + z^{m'+1}.F_{m'+1}(x) + \text{etc.}\ldots. \end{cases}$$

gibt, so ist, da

$$F(x) = F(a+z)$$

durch $(x-a)^{m'} = z^{m'}$ theilbar sein muß,

$$(8)\begin{cases} f(a+z) = f(a) + z f_1(a) + \text{etc.} \ldots \\ F(a+z) = [F_{m'}(a) + z F_{m'+1}(a) + z^2 F_{m'+2}(a) + \text{etc.}\,] z^{m'}. \end{cases}$$

$$(9) \qquad F(a) = 0,\ F_1(a) = 0, \ldots,\ F_{m'-1}(a) = 0.$$

Die Formel (6) reducirt sich demnach auf

$$(10)\begin{cases} f(a) + z f_1(a) + z^2 f_2(a) + \text{etc.} \ldots \ldots \ldots \ldots = \\ (A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots) \,.\, [F_{m'}(a) + z F_{m'+1}(a) \\ + z^2 F_{m'+2}(a) + \ldots] + z^{m'} \,.\, Z, \end{cases}$$

und man erhält, wenn man die Coefficienten gleicher Potenzen von z auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich setzt,

$$(11)\begin{cases} f(a) = A F_{m'}(a),\ f_1(a) = A_1 F_{m'}(a) + A F_{m'+1}(a), \\ f_2(a) = A_2 F_{m'}(a) + A_1 F_{m'+1}(a) + A F_{m'+2}(a), \text{ etc.} \ldots \end{cases}$$

Durch eine ganz ähnliche Rechnung findet man

$$(12)\begin{cases} f(b) = B F_{m''}(b),\ f_1(b) = B_1 F_{m''}(b) + B F_{m''+1}(b) \text{etc.} \ldots, \\ f(c) = C F_{m'''}(c),\ f_1(c) = C_1 F_{m'''}(c) + C F_{m'''+1}(c) \text{etc.} \ldots, \\ \text{etc.} \ldots \ldots \end{cases}$$

Diese verschiedenen Gleichungen reichen hin, um die Constanten $A, A_1, A_2 \ldots, B, B_1, B_2 \ldots, C, C_1, C_2 \ldots$ zu bestimmen. Sie geben z. B.

$$(13)\begin{cases} A = \dfrac{f(a)}{F_{m'}(a)},\ A_1 = \dfrac{f_1(a) - A F_{m'+1}(a)}{F_{m'}(a)}, \\ A_2 = \dfrac{f_2(a) - A_1 F_{m'+1}(a) - A F_{m'+2}(a)}{F_{m'}(a)}, \text{ etc.} \ldots \end{cases}$$

Da die auf diese Weise bestimmten Constanten offenbar unabhängig von dem Verfahren sind, dessen wir uns bei Zerlegung des rationalen Bruches $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ bedient haben, so folgt, daß dieser Bruch nur auf eine einzige Art in einfache Brüche von der Form derjenigen, welche der zweite Theil der Gleichung (3) enthält, zerlegt werden kann.

Es ist leicht einzusehen, daß die erste Gleichung (13) mit der Formel (14) im ersten Paragraphen übereinstimmt. Da nämlich die Größe $F_{m'}(a)$ derjenige Werth des Polynoms

$$F_{m'}(a) + z F_{m'+1}(a) + z^2 F_{m'+2}(a) + \text{etc.}\ldots\ldots$$

$$= \frac{F(a+z)}{z^{m'}} = \frac{F(x)}{(x-a)^{m'}}$$

ist, welcher mit $z = 0$ oder $x = a$ correspondirt, $F(x)$ aber unter die Form

$$(14) \qquad F(x) = (x-a)^{m'} \cdot \varphi(x)$$

gebracht werden kann, so ist

$$F_{m'}(a) = \varphi(a) \text{ und}$$

$$(15) \qquad A = \frac{f(a)}{\varphi(a)}.$$

Wenn die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ reell sind, die Gleichung $F(x) = 0$ aber m' Wurzeln hat, welche gleich $\alpha + \beta i$ sind, so muß diese Gleichung außerdem noch m' gleiche, mit den ersteren gepaarte Wurzeln haben, d. h. jede der letztern muß gleich $\alpha - \beta i$ sein. Verbindet man daher in diesem Falle nach erfolgter Zerlegung des rationalen Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$ die einfachen Brüche, deren Nenner

$$(x-\alpha-\beta i)^{m'} \text{ und } (x-\alpha+\beta i)^{m'},$$
$$(x-\alpha-\beta i)^{m'-1} \text{ und } (x-\alpha+\beta i)^{m'-1},$$
$$\text{etc.}\ldots\ldots$$
$$x-\alpha-\beta i, \quad x-\alpha+\beta i$$

sind, so werden die verschiedenen Summen reelle und rationale Brüche sein, deren respective Nenner

$$[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m'},$$
$$[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{m'-1},$$
$$\text{etc.}\ldots\ldots$$
$$(x-\alpha)^2 + \beta^2$$

sind, und welche ein System bilden, das in eine andere Reihe von Brüchen mit gleichen Nennern, aber mit Zählern, welche reelle lineäre Functionen von x sind, wird verwandelt werden können. Uebrigens ist es leicht, diese neue Reihe von Brüchen direct zu finden, wenn man mit denjenigen den Anfang macht,

welche den höchsten Potenzen von $(x-\alpha)^2+\beta^2$ entsprechen. Wir wollen z. B. denjenigen suchen, dessen Nenner

$$[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m'} = (x-\alpha-\beta i)^{m'} . (x-\alpha+\beta i)^{m'}$$

ist, und welcher nach den im ersten Paragraphen entwickelten Principien

$$(16) \qquad \frac{u}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m'}}$$

sein wird, vorausgesetzt, daß man

$$(17) \quad u = \frac{1}{2\beta i} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(\alpha+\beta i)}{\varphi(\alpha+\beta i)}(x-\alpha+\beta i) \\ -\frac{f(\alpha-\beta i)}{\varphi(\alpha-\beta i)}(x-\alpha-\beta i) \end{array} \right\}$$

und

$$(18) \qquad \varphi(x) = \frac{F(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m'}}$$

macht. — Es ist noch zu bemerken, daß, wenn man in der vorstehenden Formel successive

$$x = \alpha+\beta i+z, \; x = \alpha-\beta i+z$$

setzt, man mit Bezugnahme auf die zweite Gleichung von (8),

$$= \frac{\varphi(\alpha+\beta i+z)}{F_{m'}(\alpha-\beta i)+z F_{m'+1}(\alpha+\beta i)+\text{etc.}\ldots.}{(2\beta i+z)^{m'}}$$

$$= \frac{\varphi(\alpha-\beta i+z)}{F_{m'}(\alpha-\beta i)+z F_{m'+1}(\alpha-\beta i)+\text{etc.}\ldots.}{(-2\beta i+z)^{m'}},$$

mithin

$$\varphi(\alpha+\beta i) = \frac{F_{m'}(\alpha+\beta i)}{(2\beta i)^{m'}}$$

$$\varphi(\alpha-\beta i) = (-1)^{m'} . \frac{F_{m'}(\alpha+\beta i)}{(2\beta i)^{m'}}$$

erhalten wird.

Zwölftes Capitel.

Von den recurrenten Reihen.

---

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über die recurrenten Reihen.

Eine nach den aufsteigenden (ganzen) Potenzen von x geordnete Reihe

(1) $a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots\ldots a_nx^n$, etc....

heißt eine recurrente Reihe, wenn, von einem bestimmten Gliede an, der Coefficient irgend einer Potenz der Veränderlichen durch eine lineäre Function der Coefficienten einer bestimmten Anzahl von niedrigeren Potenzen ausgedrückt wird, so daß man also nur diese Coefficienten zu kennen braucht, um aus ihnen den gesuchten abzuleiten. So ist z. B. die Reihe

(1) $1, 2x, 3x^2, \ldots\ldots, (n+1)x^n$, etc....

recurrent, indem man, wenn man

$$a_n = n + 1$$

setzt, beständig für Werthe von n, welche größer als die Einheit sind,

(3) $$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

hat. Im Allgemeinen wird die Reihe (1) recurrent sein, wenn die Coefficienten mehrerer auf einander folgender Potenzen von x

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-m}$$

für alle Werthe von n, welche eine gewisse Grenze übersteigen, durch eine Gleichung vom ersten Grade mit einander verbunden sind. Es sei

(4) $$k a_{n-m} + l a_{n-m+1} + \ldots + p a_{n-1} + q a_n = 0$$

die erwähnte Gleichung, wo k, l, . . . , p, q bestimmte Constanten bedeuten, so bilden diese Constanten die sogenannte Beziehungsscale der Reihe, deren Glieder die Constanten selbst sein werden.

Ist die Reihe (1) recurrent, so können x, a_0, a_1, a_2, . . . , a_n entweder reelle Größen oder imaginäre Ausdrücke sein. Wir wollen den Modulus von a_n durch ϱ_n bezeichnen, und dieser Modulus wird dem Zahlenwerthe des ganzen Ausdrucks gleich sein, wenn derselbe reell ist. Aus den in Cap. 6. und 9. entwickelten Principien folgt unmittelbar, daß die Reihe (1) bald convergirt, bald divergirt, je nachdem der Modulus oder der Zahlenwerth von x größer oder kleiner als die kleinste Grenze ist, welcher sich der Ausdruck $(\varrho_n)^{-\frac{1}{n}}$ nähert, wenn n beständig zunimmt.

§. 2. Entwickelung der rationalen Brüche in recurrente Reihen.

So oft ein rationaler Bruch in eine nach den aufsteigenden (ganzen) Potenzen der Veränderlichen geordnete Reihe entwickelt werden kann, wird, wie gezeigt werden soll, diese Reihe auch zugleich recurrent sein.

Wir wollen zuvörderst den rationalen Bruch

$$(1) \qquad \frac{A}{(x-a)^m}$$

betrachten, in welchem a und A zwei reelle oder imaginäre Constanten bedeuten, m aber eine ganze Zahl ist. Dieser Bruch kann unter die Form

$$(-1)^m \frac{A}{a^m}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-m}$$

gebracht werden und wird sich, eben so gut als der Ausdruck

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-m},$$

in eine convergirende, nach den aufsteigenden (ganzen) Potenzen von x geordnete Reihe entwickeln lassen, wenn der reelle Zah-

lenwerth des Quotienten $\frac{x}{a}$, oder der Modulus dieses Aus-

drucks, wenn der letztere imaginär ist, zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt. Diese Bedingung wird erfüllt sein, wenn der Modulus von x (welcher sich auf den Zahlenwerth ebendieser Veränderlichen reducirt, wenn sie reell ist) kleiner ist, als der Modulus der Constanten a, und man hat in diesem Falle

$$(2)\quad \left(1-\frac{x}{a}\right)^{-m} = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{x}{a} + \frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\,\frac{x^2}{a^2} + \text{etc.}\ldots\ldots$$

$$= \frac{1.2.3\ldots(m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)} + \frac{2.3.4\ldots m}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\frac{x}{a} + \frac{3.4.5\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\frac{x^2}{a^2}$$

$$+ \text{etc.}\ldots\ldots;$$

mithin ist

$$(3)\quad \frac{A}{(x-a)^m} =$$

$$(-1)^m\left(\frac{A}{a^m} + \frac{m}{1}\cdot\frac{Ax}{a^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\,\frac{Ax^2}{a^{m+2}} + \text{etc.}\ldots\right),$$

und setzt man der Kürze wegen

$$(4)\quad \begin{cases} (-1)^m\,\frac{A}{a^m} = a_0, & (-1)^m\cdot\frac{m}{1}\cdot\frac{A}{a^{m+1}} = a_1, \\ (-1)^m\cdot\frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{A}{a^{m+2}} = a_2, & \text{etc.}\ldots\ldots, \end{cases}$$

so erhält man die Gleichung

$$(5)\quad \frac{A}{(x-a)^m} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \text{etc.}\ldots$$

Multiplicirt man beide Theile dieser Gleichung mit $(a-x)^m$, so erhält man

$$(6)\quad (-1)^m A =$$

$$\left(a^m - \frac{m}{1}\,a^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}\,a^{m-2}x^2 + \ldots \pm x^m\right)$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}\ldots)$$

$$= a^m(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \text{etc.}\ldots)$$

$$-\frac{m}{1}a^{m-1}(a_0x+a_1x^2+\ldots+a_{m-1}x^m+a_m x^{m+1}+\text{etc}\ldots)$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}(a_0x^2+\ldots+a_{m-2}x^m+a_{m-1}x^{m+1}+\text{etc}..)$$

$$-\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm(a_0x^m+a_1x^{m+1}+\text{etc}.\ldots),$$

oder, was daſſelbe iſt,

$$(7)\quad (-1)^m A=a^m a_0+\left(a^m a_1-\frac{m}{1}a^{m-1}a_0\right)x$$

$$+\left(a^m a_2-\frac{m}{1}a^{m-1}a_1+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}a_0\right)x^2+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\left(a^m a_n-\frac{m}{1}a^{m-1}a_{n-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}a_{n-2}-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\pm a_{n-m}\right)x^n+\text{etc}.\ldots\ldots$$

Da dieſe letztere Formel gelten muß, ſo oft der Modulus von x kleiner als der von a iſt, alſo gewiß ſo oft, als man dem x einen reellen, wenig von Null verſchiedenen Werth beilegt, ſo erhält man durch ein Raiſonnement, welches mit demjenigen übereinſtimmt, deſſen wir uns bedient haben, um den 6ten Lehrſatz, Cap. 6., §. 4. zu beweiſen,

$$(8)\begin{cases}(-1)^m A=a^m a_0,\ a^m a_1-\frac{m}{1}a^{m-1}a_0=0,\\ a^m a_2-\frac{m}{1}a^{m-1}a_1+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}a_0=0,\ \text{etc}\ldots.,\end{cases}$$

und allgemein

$$(9)\quad a^m a_n-\frac{m}{1}a^{m-1}a_{n-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}a_{n-2}-\ldots.$$

$$\ldots\pm a_{n-m}=0.$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Gleichung (9) nur dann gilt, wenn n eine ganze Zahl und gleich oder größer als m iſt, und daß man ſich einer der Formeln (8) bedienen muß, wenn $n<m$ iſt. Da ferner die Gleichung (9) in Beziehung auf die Conſtanten

a_n, a_{n-1}, a_{n-2} . . . a_{n-m}

linear ist und für die erste dieser Constanten eine lineare Function aller übrigen geben wird, so folgt, daß in der Reihe

(10) a_0, $a_1 x$, $a_2 x^2$, ... , $a_n x^n$, etc. . . . ,

vom Gliede $a_m x^m$ an gerechnet, der Coefficient irgend einer Potenz von x durch eine lineare Function der Coefficienten der m vorhergehenden Potenzen ausgedrückt wird, und daß also die Reihe zu denjenigen gehört, welche wir recurrent genannt haben.

Unter den verschiedenen besondern Formeln, welche man aus (3) ableiten kann, verdienen diejenigen besonders gemerkt zu werden, welche den beiden Annahmen $m = 1$ und $m = 2$ entsprechen. Man findet im ersten Falle

$$(11) \quad \frac{A}{x-a} = -\left(\frac{A}{a} + \frac{A}{a^2}x + \frac{A}{a^3}x^2 + \text{etc.} \ldots\right),$$

und im zweiten Falle

$$(12) \quad \frac{A}{(x-a)^2} = \frac{A}{a^2} + \frac{2A}{a^3}x + \frac{3A}{a^4}x^2 + \frac{4A}{a^5}x^3 + \text{etc.} \ldots$$

Die beiden vorstehenden Formeln, von welchen die erste die Summe einer geometrischen Progression bestimmt, gelten, so wie die Formel (3), so oft der Modulus von x kleiner als der von a ist.

Setzt man in (2)

$$A = 1, \quad a = 1,$$

so erhält man die Gleichung

$$(13) \quad \frac{1}{(x-1)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \text{etc.} \ldots,$$

deren zweiter Theil der Summe der Reihe (2), (§. 1.) gleich ist, und bei welcher der Modulus von x kleiner als die Einheit sein muß. Wir wollen nun einen beliebigen rationalen Bruch

$$(14) \quad \frac{f(x)}{F(x)}$$

betrachten. — Es seien a, b, c, . . . die verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$(15) \quad F(x) = 0,$$

m' sei die Anzahl der Wurzeln, welche gleich a, m'' die der Wurzeln, welche gleich b, m''' die der Wurzeln, welche gleich c sind, etc...., und k der Coefficient der höchsten Potenz von x in dem Polynom $F(x)$; so daß man also haben wird

$$(16) \quad F(x) = k\,(x-a)^{m'}.(x-b)^{m''}.(x-c)^{m'''}\ldots,$$

so wird die im vorigen Capitel entwickelte Methode zur Zerlegung eines rationalen Bruches in einfache Factoren eine Gleichung von der Form

$$(17)\begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(x)} = R + \dfrac{A}{(x-a)^{m'}} + \dfrac{A_1}{(x-a)^{m'-1}} + \ldots + \dfrac{A_{m'-1}}{x-a} \\ \quad + \dfrac{B}{(x-b)^{m''}} + \dfrac{B_1}{(x-b)^{m''-1}} + \ldots + \dfrac{B_{m''-1}}{x-b} \\ \quad + \dfrac{C}{(x-c)^{m'''}} + \dfrac{C_1}{(x-c)^{m'''-1}} + \ldots + \dfrac{C_{m'''-1}}{x-c} \\ \quad + \text{etc.}\ldots\ldots \end{cases}$$

liefern, wo $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots, C, C_1, \ldots$ bestimmte Constanten bedeuten, und R eine ganze Function von (x), welche verschwindet, wenn das Polynom $f(x)$ von einem niedrigeren Grade ist als $F(x)$. Gesetzt nun, der Modulus von x sei kleiner als die Moduli von a, b, c..., mithin kleiner als der kleinste von diesen, so kann man jeden der einfachen Brüche, aus welchen der zweite Theil von (17) besteht, in eine convergirende und nach den aufsteigenden (ganzen) Potenzen von x geordnete Reihe entwickeln, und wenn man alle diese Reihenentwickelungen zu R addirt, so erhält man eine neue convergirende und gleichfalls nach den aufsteigenden Potenzen von x geordnete Reihe, deren Summe dem rationalen Bruche $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ gleich sein wird. Es sei

$$(18) \quad a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2, \ldots,\ a_n x^n,\ \text{etc.}\ldots$$

diese Reihe, so wird die Formel

$$(19) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}\ldots$$

so oft gelten, als diese neue Reihe convergirt, d. h. so oft der Modulus von x kleiner ist, als die kleinste unter denjenigen Zahlen, welchen die Moduli der Wurzeln der Gleichung (15) gleich sind. Ich behaupte aber auch, daß die Reihe (18) beständig recurrent sein wird. Der Beweis ist leicht.

Es sei $m = m' + m'' + m''' + \text{etc.}\ldots$, d. h. der Grad des Polynoms F (x), so wollen wir

$$(20) \qquad F(x) = kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q$$

setzen, wo k, l,...p, q reelle oder imaginäre Constanten bedeuten, so verwandelt sich die Gleichung (19) in

$$(21) \qquad \frac{f(x)}{kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}\ldots$$

Es ist demnach

$$(22) \qquad f(x) =$$
$$(q + px + \ldots + lx^{m-1} + kx^m).(a + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}\ldots)$$

Entwickelt man den zweiten Theil, wie bei der Gleichung (6), so findet man

$$(23) \quad \begin{cases} f(x) = qa_0 + (qa_1 + pa_0)x + \text{etc.}\ldots \\ \quad + (qa_m + pa_{m-1} + \ldots + la_1 + ka_0)x^m \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + (qa_n + pa_{n-1} + \ldots + la_{n-m+1} + ka_{n-m})x^n \\ \quad + \text{etc.}\ldots\ldots \end{cases}$$

Diese Formel gilt so lange, als der Modulus von x kleiner ist als die Moduli von a, b, c,.... Man kann daher durch ein Raisonnement, welches mit demjenigen übereinstimmt, dessen wir uns bedient haben, um den 6ten Lehrsatz (Cap. 6., §. 4.) zu beweisen, darthun, daß die Coefficienten gleicher Potenzen von x in beiden Theilen der Gleichung einander gleich sein müssen, und hieraus folgt: 1) daß die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x in dem Polynom f (x) respective den Coefficienten derselben Potenzen in der Reihe, deren Summe den zweiten Theil der Gleichung (23) bildet, gleich sind; 2) daß in dieser Reihe die Coefficienten derjenigen Potenzen, welche den Grad des Polynoms f (x) übersteigen, sich

auf Null reduciren müssen. Betrachtet man ferner ein Glied der Reihe, in welchem der Exponent n den Grad von f (x) übersteigt und zugleich größer oder gleich m ist, so wird dieses Glied von der Form

$$(q\,a_n + p\,a_{n-1} + \ldots + l\,a_{n-m+1} + k\,a_{n-m})\,x^n$$

sein. So oft demnach n den Grad des Polynoms f (x) übersteigt und zugleich größer oder gleich m ist, so oft findet zwischen den Coefficienten

$$a_n,\ a_{n-1},\ \ldots\ a_{n-m+1},\ a_{n+m}$$

die lineäre Gleichung

$$(24)\qquad q a_n + p a_{n-1} + \ldots + l a_{n-m+1} + k a_{n-m} = 0$$

statt; der Coefficient der Potenz x^n wird demnach für einen solchen Werth von n durch eine lineäre Function der Coefficienten der m vorhergehenden Potenzen ausgedrückt, und die Reihe (18) ist also recurrent. Ihre Beziehungsscale wird durch die Constanten k, l, ... p, q gebildet. Unter den Reihen, welche durch Reihenentwickelung der Brüche entstehen, aus welchen der zweite Theil von (17) besteht, und welche alle convergiren, sobald der Modulus von x kleiner ist als die Moduli der Wurzeln von (15), würde wenigstens eine divergiren, wenn der Modulus der Veränderlichen größer als der irgend einer Wurzel wäre. Folglich ist die Reihe (18) im ersten Falle convergirend, im zweiten Falle hingegen divergirend. Anderseits wird sie convergiren oder divergiren, je nachdem bei beständigem Zunehmen von n (wenn ϱ_n der Modulus des Coefficienten a_n ist) der Modulus von x kleiner oder größer als die kleinste Grenze von $(\varrho_n)^{-\frac{1}{n}}$ ist. (S. §. 1.)

Da beide Regeln über die Convergenz nothwendigerweise mit einander übereinstimmen müssen, so folgt, daß der kleinste Modulus unter denjenigen, welche den Wurzeln der Gleichung (15) entsprechen, genau der kleinsten Grenze des Ausdrucks $(\varrho_n)^{-\frac{1}{n}}$ gleich sein muß.

Sind die Functionen f (x), F (x) reell, so ist es auch

a_n, und sein Modulus ϱ_n ist alsdann seinem Zahlenwerthe gleich. Hat in diesem Falle die Gleichung $F(x) = 0$ nur reelle Wurzeln, so ist die kleinste Wurzel nach dem Vorigen (abgesehen vom Zeichen) der kleinsten Grenze von $(\varrho_n)^{-\frac{1}{n}}$ gleich. Convergirt endlich der Quotient $\frac{\varrho_n}{\varrho_{n+1}}$ gegen eine bestimmte Grenze, so kann man diese nach Cap. 2., §. 3., Lehrs. 2. für die gesuchte Grenze von $(\varrho_n)^{-\frac{1}{n}}$ substituiren. Diese Betrachtung führt auf die von Daniel Bernoulli aufgestellte Regel, nach welcher die kleinste von allen Größen, durch welche die Wurzeln einer algebraischen Gleichung ausgedrückt werden (vorausgesetzt, daß diese Wurzeln reell sind), numerisch (also abgesehen vom Zeichen) bestimmt werden kann.

§. 3. Summation der recurrenten Reihen und Bestimmung ihres allgemeinen Gliedes.

Wenn eine nach den aufsteigenden Potenzen von x geordnete Reihe convergirt und zugleich recurrent ist, so ist ihre Summe stets ein rationaler Bruch. Denn es sei

(1) $$a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots . a_n x^n, \text{ etc} \ldots .$$

eine solche Reihe, und der Coefficient a_n sei, wenn n eine gewisse Grenze übersteigt, durch eine Gleichung von der Form

(2) $$k a_{n-m} + l a_{n-m+1} + \ldots + p a_{n-1} + q a_n = 0$$

gegeben, so daß also die Constanten

$$k, l, \ldots, p, q$$

die Beziehungsscale der Reihe bilden. Multiplicirt man die Summe dieser Reihe, also

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc} \ldots .$$

mit dem Polynom

$$k x^m + l x^{m-1} + \ldots + p x + q,$$

so ist das Product eine neue Reihe, in welcher der wie im 6ten Cap., §. 4., Lehrs. 5. berechnete Coefficient von x^n für Werthe von n, welche die angegebene Grenze übersteigen, verschwindet, d. h. das erwähnte Product wird ein Polynom von demjenigen

Grade ſein, der durch jene Grenze beſtimmt wird. Bezeichnet man dieſes neue Polynom durch f (x), ſo iſt alsdann

(3) $f(x) = (kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}\ldots)$,

mithin

(4) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}\ldots = \frac{f(x)}{kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q}$.

Demnach iſt die Summe jeder convergirenden, nach den aufſteigenden (ganzen) Potenzen von x geordneten und dabei recurrenten Reihe ein rationaler Bruch, deſſen Nenner ein Polynom iſt, in welchem die auf einander folgenden Potenzen von x die verſchiedenen Glieder der Beziehungsſcale der Reihe zu Coefficienten haben.

Wenn die erſten Glieder einer recurrenten Reihe und die Beziehungsſcale, vermittelſt welcher man aus dieſen erſten Gliedern alle folgenden ableiten kann, gegeben ſind, ſo kann man nach der eben mitgetheilten Methode ohne Mühe den rationalen Bruch ableiten, welchem die Summe der Reihe gleich iſt, im Falle ſie convergirend bleibt. Iſt dieſer rationale Bruch berechnet, ſo kann man für denſelben eine Summe von einfachen Brüchen ſubſtituiren, zu welchen nöthigenfalls noch eine ganze Function von x hinzukommt. Entwickelt man hierauf die Reihen, welche für paſſend gewählte Werthe von x die Reihenentwickelungen der erwähnten einfachen Brüche ausdrücken, und addirt man deren allgemeine Glieder, ſo wird man das allgemeine Glied der vorgelegten Reihe erhalten.

Noten.

Erste Note.

Ueber die Theorie der positiven und negativen Größen.

Es ist viel über die Natur der positiven und negativen Größen gestritten worden, und man hat verschiedene Theorien derselben aufgestellt. Diejenige, welche wir angenommen haben (siehe die Vorerinnerungen), scheint uns am geeignetsten, um Licht über alle Schwierigkeiten in der Theorie dieser Größen zu verbreiten. Wir werden weiter unten zeigen, wie man aus ihr die Regel über die Zeichen herleiten kann.

So wie der Begriff der Zahl aus dem Maße der Größen entspringt, eben so gelangt man zu dem Begriffe „Zahlengröße" (positive oder negative), wenn man jede Größe einer gegebenen Art entweder als Increment oder als Decrement einer andern bestimmten Größe derselben Art betrachtet. Um diese Bestimmung anzudeuten, bezeichnet man diejenigen Größen, welche Incremente sein sollen, durch Zahlen, denen man das Zeichen + vorsetzt, diejenigen Größen hingegen, welche Decremente sein sollen, durch Zahlen, denen das Zeichen — vorgesetzt wird. Die Zeichen + oder — vor Zahlen können, einer bereits von Andern gemachten Bemerkung gemäß *), mit Adjectiven vor ihren Substantiven verglichen werden. Die Zahlen mit dem Zeichen + nennt man positive Größen; die

*) Transactions philosophiques, année 1806.

Zahlen mit dem Zeichen — negative Größen. Endlich ist man übereingekommen, die mit gar keinem Zeichen behafteten Zahlen zur Classe der positiven Größen zu rechnen, und aus diesem Grunde überhebt man sich zuweilen der Mühe, solchen Zahlen, welche Größen dieser Art ausdrücken, das Zeichen + vorzusetzen. In der niedern Arithmetik operirt man stets mit Zahlen, deren Werth gegeben ist, welche also auch in Ziffern gegeben sind; während man in der Algebra, wo man die allgemeinen Eigenschaften der Zahlen betrachtet, gewöhnlich diese Zahlen durch Buchstaben bezeichnet. Alsdann wird eine Zahlengröße durch einen mit dem Zeichen + oder — behafteten Buchstaben ausgedrückt. Uebrigens hindert uns nichts, auch die Zahlengrößen, gleich den Zahlen, durch bloße Buchstaben zu bezeichnen. Durch diesen Kunstgriff werden die Hülfsmittel der Analysis sogar noch vermehrt; will man sich indessen desselben bedienen, so hat man auf folgende Dinge zu achten, welche allgemein angenommen worden sind.

So wie man nach dem Vorigen, wenn A eine Zahl bedeutet, die positive Größe, deren numerischer Werth gleich A ist, sowohl durch A, als durch + A bezeichnen kann, während — A die entgegengesetzte negative Größe bedeutet, d. h. die negative Größe, deren Zahlenwerth A ist: so betrachtet man auch, wenn a eine Zahlengröße bedeutet, die beiden Ausdrücke a und + a als gleichbedeutend und bezeichnet die entgegengesetzte Größe durch — a.

Wenn demnach A eine Zahl, oder auch eine Zahlengröße, bedeutet, und man

$$a = +A,\ b = -A$$

setzt, so ist auch

$$+a = +A,\ +b = -A,$$
$$-a = -A,\ -b = +A.$$

Setzt man in diesen vier Gleichungen für a und b ihre Werthe in Parenthesen, so erhält man die Formeln

$$(1)\quad \begin{cases} +(+A) = +A,\ +(-A) = -A, \\ -(+A) = -A,\ -(-A) = +A. \end{cases}$$

In jeder dieser vier Gleichungen ist das Zeichen des zweiten Theiles das sogenannte Product der beiden Zeichen des ersten Theiles. Zwei Zeichen mit einander multipliciren heißt: ihr Product finden. Der bloße Anblick der Gleichungen (1) reicht hin, um die in folgendem Lehrsatze ausgedrückte Regel zu begründen.

Lehrsatz 1. Das Product zweier gleichen Zeichen ist stets +; das Product zweier entgegengesetzten Zeichen stets —.

Aus eben diesen Gleichungen folgt auch, daß das Product zweier Zeichen, wenn das eine + ist, dem andern gleich ist. Aus dieser Bemerkung lassen sich leicht folgende Sätze herleiten.

Lehrsatz 2. Wenn man mehrere Zeichen in beliebiger Ordnung mit einander multiplicirt, so ist das Product stets +, wenn die Anzahl der — Zeichen gerade ist, — dagegen im entgegengesetzten Falle.

Lehrsatz 3. Das Product einer beliebigen Anzahl von Zeichen bleibt dasselbe, in welcher Ordnung man sie auch immer multipliciren mag.

Aus den gegebenen Erklärungen folgt unmittelbar, daß die Multiplication der Zeichen in gar keiner Beziehung zur Multiplication der Zahlen steht. Man wird sich indessen darüber nicht wundern, wenn man erwägt, daß der Begriff des Productes der Zeichen sich gleich bei den ersten Schritten ergibt, welche man in der Analysis thut, indem man bei der Addition oder Subtraction eines Monoms in der That das Zeichen dieses Monoms mit dem Zeichen + oder — multiplicirt.

Geht man von den eben aufgestellten Principien aus, so heben sich alle Schwierigkeiten, welche der Gebrauch der Zeichen + oder — uns bei den Operationen der Algebra, oder der Trigonometrie, in den Weg legen kann, außerordentlich leicht. Man wird nur die Operationen, bei welchen es auf die Zahlen ankommt, sorgfältig von denjenigen unterscheiden dürfen, welche sich auf positive oder negative Größen (Zahlengrößen) beziehen. Vorzüglich wird man es sich angelegen sein lassen müssen, ihren beiderseitigen Zweck auf eine bestimmte Weise anzugeben; ihre Resultate zu erforschen, und ihre vorzüglichsten Eigenschaften nachzuweisen. Wir wollen dies für die verschiedenen Operationen, welche man gewöhnlich auszuführen hat, mit wenigen Worten versuchen.

Addition und Subtraction.

Summen und Differenzen der Zahlen. Eine arithmetische Addition ausführen, heißt so viel als: zu einer Zahl A eine andere Zahl B hinzufügen, oder mit anderen Worten: die Zahl A um das Increment B wachsen lassen. Das Resultat dieser Operation heißt Summe. Man

deutet dieselbe dadurch an, daß man hinter die Zahl A ihr Increment + B setzt, also durch

A + B.

Man setzt als evident voraus: daß die Summe mehrerer Zahlen dieselbe bleibt, in welcher Ordnung man immer die Zahlen zu einander addiren mag. Dies ist ein Grundsatz, auf welchem die Arithmetik, die Algebra und alle Zweige des Calculs beruhen.

Die arithmetische Subtraction ist das Umgekehrte von der Addition. Sie besteht darin, daß man von einer Zahl A eine zweite Zahl B wegnimmt (abzieht), d. h. darin, daß man eine dritte Zahl C sucht, welche, zur zweiten addirt, wieder die erste gibt. Man sagt hier auch: „die Zahl A um das Decrement — B abnehmen lassen". Das Resultat dieser Operation nennt man Differenz. Man deutet dieselbe dadurch an, daß man hinter die Zahl A das Decrement — B setzt, also durch

A — B.

Zuweilen bezeichnet man auch die Differenz A — B mit dem Namen „Ueberschuß", oder „Rest", oder man nennt sie auch das arithmetische Verhältniß zwischen den beiden Zahlen A und B.

Summen und Differenzen der Zahlengrößen. Wir haben in den Vorerinnerungen bereits erklärt, was unter der Addition zweier Zahlengrößen zu verstehen sei. Addirt man mehrere solche Größen zu einander, so erhält man ihre Summe. Es ist leicht, folgenden Satz zu beweisen, wenn man sich auf den Grundsatz stützt, welcher sich auf die Addition der Zahlen bezieht.

Lehrsatz 4. Die Summe mehrerer Zahlengrößen bleibt dieselbe, in welcher Ordnung man dieselben auch immer addiren mag.

Man deutet die Summe mehrerer Zahlengrößen ganz einfach dadurch an, daß man die Buchstaben, welche entweder deren Zahlenwerthe oder die Zahlengrößen selbst bezeichnen, neben einander schreibt, wobei jedoch vor jedem Buchstaben das Zeichen stehen muß, dessen es bedarf, wenn der Buchstabe die ihm correspondirende Zahlengröße ausdrücken soll. Die verschiedenen Buchstaben können übrigens in beliebiger Ordnung auf einander folgen, und es ist erlaubt, daß Zeichen + vor dem ersten Buchstaben wegzulassen. Wir wollen z. B. die Größen

a, b, c, . . ., — f, — g, — h, . . .

betrachten. Ihre Summe wird durch den Ausdruck

$$a - f - g + b - h + c + \text{etc.}\ldots$$

ausgedrückt werden können. In einem solchen Ausdrucke heißt jede der Größen

a, b, c, . . ., — f, — g, — h, . . .

ein Monom; der Ausdruck selbst hingegen ein Polynom, dessen verschiedene Glieder jene Monomien sind.

Wenn ein Polynom nur zwei, drei, vier. . . Glieder enthält, so erhält es den Namen Binom, Trinom, Quadrinom. . . Es läßt sich sehr leicht zeigen, daß zwei Polynomien, deren Glieder gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind, zwei entgegengesetzte Größen sind.

Die Differenz zwischen einer Zahlengröße und einer zweiten ist eine dritte Zahlengröße, welche, zur zweiten addirt, die erste gibt. Geht man von dieser Erklärung aus, so kann man leicht zeigen, daß, um von einer Größe a eine zweite b zu subtrahiren, man nur zu der ersteren die dem b entgegengesetzte Größe, d. h. — b, addiren darf. Hieraus folgt, daß man die Differenz zwischen a und b durch

$$a - b$$

zu bezeichnen hat.

Anmerkung. Da die Subtraction das Umgekehrte von der Addition ist, d. h. das der Addition entgegengesetzte Verfahren, so läßt sich dieselbe stets auf zweierlei Art andeuten. Um z. B. anzudeuten, daß c die Differenz der Größen a und b ist, kann man $a - b = c$, aber eben so gut auch $a = b + c$ schreiben.

Multiplication und Division.

Producte und Quotienten der Zahlen. Die Zahl A mit der Zahl B multipliciren, heißt: eben so mit A operiren, wie man mit der Einheit operiren muß, um B zu erhalten. Das Resultat dieser Operation nennt man das Product von A und B. — Um vorstehende Erklärung der Multiplication gehörig zu verstehen, muß man, je nach Beschaffenheit der Zahl B, verschiedene Fälle unterscheiden. B nämlich kann bald rational sein, d. h. eine ganze oder eine gebrochene Zahl, bald irrational, d. h. nicht rational.

Ist B eine ganze Zahl, so darf man nur, um B zu erhalten, die Einheit mehrmals hinter einander als Summanden ansetzen und sodann addiren. Man wird also das Product von

A und B erhalten, wenn man die Zahl A eben so vielmal als Summanden ansetzt, d. h. wenn man die Summe von eben so vielen, der Zahl A gleichen Zahlen berechnet, als Einheiten in B enthalten sind. Ist B ein Bruch, dessen Zähler m, und dessen Nenner n ist, so besteht die Operation, durch welche man die Zahl B erhält, darin, daß man die Einheit in n gleiche Theile theilt, und das gefundene Resultat m mal nimmt. Man erhält demnach das Product von A und B, wenn man die Zahl A in n gleiche Theile theilt und das Resultat m mal nimmt.

Ist B irrational, so kann man für diese Zahl rationale Werthe erhalten, welche sich ihr immer mehr und mehr nähern. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß in diesem Falle sich die Producte, welche man erhält, wenn man A successive durch alle die erwähnten rationalen Zahlen multiplicirt, einer gewissen Grenze immer mehr und mehr sich nähern werden. Diese Grenze wird das Product von A und B sein.

Bei der Multiplication von A mit B heißt A der Multiplicandus und B der Multiplicator. Beide Zahlen zusammen, nennt man auch die Factoren des Productes.

Um das Product von A mit B anzudeuten, bedient man sich ohne Unterschied folgender drei Bezeichnungsarten:

$$B \times A,\quad B.A,\quad BA.$$

Das Product mehrerer Factoren bleibt dasselbe, in welcher Ordnung man dieselben auch immer multipliciren mag.

Dieser Satz kann sehr leicht aus dem Grundsatze abgeleitet werden, welchen wir bei der Addition der Zahlen kennen gelernt haben, insofern nur von ganzen Zahlen die Rede ist. Sodann kann man ihn successive 1) für rationale gebrochene Factoren, 2) für zwei oder mehrere irrationale Factoren beweisen.

Die Zahl A durch die Zahl B dividiren heißt: eine dritte Zahl finden, deren Product mit B, A gibt. Die Operation, durch welche man hierzu gelangt, heißt die Division, und das Resultat dieser Operation der Quotient. Ferner nennt man A den Dividendus, B den Divisor.

Um den Quotienten von A durch B anzudeuten, bedient man sich nach Belieben einer der beiden folgenden Bezeichnungsarten

$$\frac{A}{B},\quad A : B.$$

Zuweilen nennt man den Quotienten A : B auch das geometrische Verhältniß der beiden Zahlen A und B.

Die Gleichheit zweier geometrischen Verhältnisse A : B, C : D, oder mit anderen Worten, die Gleichung

$$A : B = C : D$$

nennt man eine geometrische Proportion. Man bedient sich auch statt des Zeichens = des gleichbedeutenden Zeichens : : und schreibt A : B :: C : D.

Anmerkung. Ist B eine ganze Zahl, so heißt, nach der gegebenen Erklärung, A durch B dividiren so viel als: A in so viele gleiche Theile theilen, als B Einheiten enthält. Aus dieser Bemerkung folgt, daß, wenn m und n zwei ganze Zahlen sind, der n^{te} Theil der Einheit durch

$$\frac{1}{n},$$

und der Bruch, dessen Zähler m, und dessen n ist, durch $m \times \frac{1}{n}$ bezeichnet werden muß. Da sich aber leicht beweisen läßt, daß das Product $m \times \frac{1}{n}$ dem Quotienten von m durch n, $\left(\frac{m}{n}\right)$, gleich ist, so kann derselbe Bruch auch bequemer durch $\frac{m}{n}$ bezeichnet werden.

Producte und Quotienten der Zahlengrößen. Das Product einer Zahlengröße durch eine andere ist einer dritten Zahlengröße gleich, deren Zahlenwerth dem Producte der Zahlenwerthe der beiden andern, und dessen Zeichen dem Producte ihrer Zeichen gleich ist. Zwei Zahlengrößen mit einander multipliciren, heißt: ihr Product finden. Eine der beiden Größen heißt Multiplicator, die andere Multiplicandus, und beide zusammen Factoren des Productes. — Hieraus ergibt sich sehr leicht folgender Satz.

Lehrsatz 5. Das Product mehrerer Zahlengrößen bleibt dasselbe, in welcher Ordnung man sie auch immer multipliciren mag.

Um diesen Satz zu beweisen, darf man nur die beiden obigen Sätze von den Producten der Zeichen und der Zahlen mit einander combiniren.

Eine Zahlengröße durch eine andere dividiren, heißt: eine dritte Zahlengröße suchen, deren Product mit der zweiten die erste gibt. Die Operation, durch welche man hierzu gelangt, heißt Division; die erste Zahlengröße Dividendus, die zweite Divisor, und das Resultat der Operation Quotient.

Zuweilen nennt man den Quotienten auch das geometrische Verhältniß der beiden gegebenen Zahlengrößen. Geht man von den gegebenen Erklärungen aus, so kann man sehr leicht beweisen, daß der Quotient zweier Zahlengrößen den Quotienten ihrer Zahlenwerthe zum Zahlenwerthe, und das Product ihrer Zeichen zum Zeichen hat.

Die Multiplication und Division wird bei Zahlengrößen ebenso angedeutet wie bei Zahlen.

Eine Zahlengröße werden wir das Umgekehrte von einer andern nennen, wenn das Product beider Zahlengrößen 1 ist. Dieser Erklärung gemäß ist $\frac{1}{a}$ das Umgekehrte von a, und a das Umgekehrte von $\frac{1}{a}$.

Man wird weiter oben bemerkt haben, daß dasjenige, was in der Arithmetik ein Bruch genannt wird, dem geometrischen Verhältnisse oder dem Quotienten zweier ganzen Zahlen gleich ist. In der Algebra bezeichnet man mit diesem Namen auch das Verhältniß oder den Quotienten zweier beliebigen Zahlengrößen. Sind also a und b zwei Zahlengrößen, so ist ihr Verhältniß $\frac{a}{b}$ ein algebraischer Bruch.

Wir glauben noch bemerken zu müssen, daß die Division, insofern sie eine der Multiplication entgegengesetzte Operation ist, immer auf zweierlei Art angedeutet werden kann. So z. B. kann man, um anzudeuten, daß c der Quotient der beiden Größen a und b ist, $\frac{a}{b} = c$, aber auch eben so gut $a = bc$ schreiben.

Die Producte und Quotienten der Zahlen und der Zahlengrößen haben gewisse allgemeine Eigenschaften, auf welche man sich häufig beruft. Wir haben z. B. schon davon gesprochen, daß jedes Product dasselbe bleibt, in welcher Ordnung auch immer seine Factoren mit einander multiplicirt werden mögen. Andere, nicht minder merkwürdige Eigenschaften findet man in folgenden Formeln angegeben.

Es seien a, b, c, ... k; a′, b′, ...; a″, b″ .....; etc. ... positive oder negative Größen, so ist für alle möglichen Werthe dieser Zahlengrößen

$$(2)\begin{cases} k(a+b+c+\ldots)=ka+kb+kc+\ldots, \\ \dfrac{a+b+c\ldots.}{k}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k}+\dfrac{c}{k}+\ldots, \\ \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a'}{b'}\cdot\dfrac{a''}{b''}\times\ldots=\dfrac{a\,a'\,a''\ldots.}{b\,b'\,b''\ldots.}, \\ \dfrac{k}{\left(\frac{a}{b}\right)}=\dfrac{bk}{a}=\dfrac{b}{a}\times k. \end{cases}$$

Es wäre zu weitläufig, alles das aufzuzählen, was sich aus diesen vier Formeln noch weiter ableiten läßt. Aus der dritten Formel z. B. folgt: 1) daß die Brüche

$$\frac{a}{b},\ \frac{ka}{kb},$$

wo a, b, k beliebige Zahlengrößen sind, einander gleich sind; 2) daß der Bruch $\frac{b}{a}$ das Umgekehrte von $\frac{a}{b}$ ist; 3) daß man, um eine Zahlengröße k durch eine andere zu dividiren, nur k durch das Umgekehrte von a, d. h. durch $\frac{1}{a}$, multipliciren darf.

Potenziren, Radiciren.

Potenzen und Wurzeln der Zahlen: positive Exponenten.

Die Zahl A auf die durch die Zahl B bezeichnete (angedeutete) Potenz erheben, heißt: eine dritte Zahl suchen, welche eben so durch die Multiplication aus A entsteht, wie B durch die Addition aus der Einheit hervorgeht. Das Resultat dieser in Beziehung auf A vorgenommenen Operation heißt deren Potenz vom Grade B, oder ihre B^{te} Potenz. Um die gegebene Erklärung des Potenzirens gehörig zu verstehen, hat man drei Fälle zu unterscheiden. B kann nämlich eine ganze oder eine gebrochene, oder endlich eine irrationale Zahl sein. Ist B eine ganze Zahl, so ist sie die Summe mehrerer Einheiten. In diesem Falle wird die B^{te} Potenz von A das Product eben so vieler Factoren (jeder gleich A) sein, als B Einheiten enthält.

Ist B ein Bruch $\frac{m}{n}$ (wo m und n ganze Zahlen sind), so muß man, um diesen Bruch zu erhalten, 1) eine Zahl suchen, welche mit n multiplicirt (n mal genommen) die Einheit

gibt; 2) diese Zahl m mal nehmen. Man wird demnach, um die $\frac{m}{n}^{te}$ Potenz von A zu erhalten, 1) eine Zahl von der Beschaffenheit suchen, daß das Product von n, dieser Zahl gleichen, Factoren A gibt; 2) das Product von m, dieser Zahl gleichen, Factoren berechnen. — Setzt man $m = 1$, so ist die Potenz von A, welche wir betrachten, die $\frac{1}{n}^{te}$, und diese wird bloß dadurch bestimmt, daß die Zahl A dem Producte von n, dieser gesuchten Potenz gleichen, Factoren gleich sein muß. Ist B irrational, so kann man rationale Werthe für diese Zahl finden, welche sich ihrem wahren Werthe immer mehr und mehr nähern. Es läßt sich aber leicht beweisen, daß in diesem Falle diejenigen Potenzen von A, welche durch die erwähnten rationalen Zahlen bedingt werden, sich einer gewissen Grenze immer mehr und mehr nähern. Diese Grenze ist die B^{te} Potenz von A.

Wenn die Zahl A auf die Potenz vom Grade B erhoben wird, so heißt A die Wurzel, B der Exponent. Um die B^{te} Potenz von A anzudeuten, bedient man sich folgender Bezeichnungsart:

$$A^B.$$

Nach den gegebenen Erklärungen ist die erste Potenz einer Zahl nichts Anderes, als diese Zahl selbst. Ihre zweite Potenz ist das Product von zweien dieser Zahl gleichen Factoren ꝛc. ꝛc. Geometrische Betrachtungen sind die Ursache, weshalb man die zweite Potenz auch das Quadrat, und die dritte den Cubus zu nennen pflegt. Was die Potenz vom Grade Null anbetrifft, so ist sie die Grenze, welcher sich die Potenz vom Grade B nähert, wenn die Zahl B beständig abnimmt. Es ist leicht einzusehen, daß die Einheit diese Grenze ist, und hieraus folgt allgemein

$$A^0 = 1,$$

wobei wir jedoch voraussetzen, daß A einen endlichen, von Null verschiedenen Werth hat.

Aus der Zahl A die B^{te} Wurzel ausziehen, heißt: eine dritte Zahl suchen, welche, auf die B^{te} Potenz erhoben, A gibt. Die Operation, durch welche man hierzu gelangt, heißt die Wurzelausziehung (das Radiciren), und das Resultat dieser Operation die B^{te} Wurzel aus A. Die Zahl B, welche den Grad der Wurzel anzeigt, heißt der

Wurzelexponent. Man bezeichnet die B^te Wurzel aus A durch

$$\sqrt[B]{A}.$$

Die Wurzeln vom zweiten und dritten Grade werden gewöhnlich Quadrat- und Cubikwurzeln genannt. Ist von einer Quadratwurzel die Rede, so überhebt man sich der Mühe, den Wurzelexponenten 2 hinzuschreiben. Die beiden Bezeichnungen

$$\sqrt[2]{A}, \quad \sqrt{A}$$

sind demnach gleichbedeutend.

Anmerkung. Da die Ausziehung der Wurzeln aus Zahlen das Umgekehrte ihrer Erhebung auf Potenzen ist, so kann sie auf zweifache Weise angedeutet werden. So z. B. kann man, um anzudeuten, daß die Zahl C der B^ten Wurzel aus A gleich ist, beliebig

$$A = C^B \text{ oder } C = \sqrt[B]{A}$$

schreiben. — Wir bemerken noch, daß, wenn n eine beliebige ganze Zahl ist, $A^{\frac{1}{n}}$ eine Zahl von der Beschaffenheit sein wird, daß das Product von n, dieser Zahl gleichen, Factoren der Zahl A gleich ist; mit andern Worten: es ist

$$\left(A^{\frac{1}{n}}\right)^n = A,$$

mithin

$$A^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A}.$$

Ist demnach n eine ganze Zahl, so ist die $\frac{1}{n}$^te Potenz von A gleichbedeutend mit der n^ten Wurzel aus A. Es läßt sich leicht beweisen, daß dies auch dann der Fall ist, wenn man statt der ganzen Zahl n eine beliebige Zahl setzt.

Potenzen von Zahlen mit negativen Exponenten.

Eine Zahl A auf eine Potenz erheben, deren Grad durch einen negativen Exponenten — B angezeigt wird, heißt: die Einheit durch A^B dividiren. Der Werth des Ausdrucks

$$A^{-B}$$

wird also durch die Gleichung

$$A^{-B} = \frac{1}{A^B}$$

bestimmt, welche auch unter die Form

$$A^B \cdot A^{-B} = 1$$

gebracht werden kann.

Wenn man demnach eine und dieselbe Zahl auf zwei Potenzen erhebt, deren Grad durch gleiche und entgegengesetzte Exponenten angezeigt wird, so erhält man zum Resultate zwei positive Größen, von welchen die eine das Umgekehrte der andern ist.

Reelle Potenzen und Wurzeln von Zahlengrößen. Wenn man in den gegebenen Erklärungen von den Potenzen und Wurzeln der Zahlen, welche ganzen oder gebrochenen Exponenten entsprechen, an die Stelle des Wortes Zahl das Wort Zahlengröße setzt, so erhält man folgende Definitionen für die rellen Potenzen und Wurzeln der Zahlengrößen.

Ein Zahlengröße auf die reelle m^{te} Potenz erheben (wo m eine ganze Zahl ist), heißt: das Product von m, dieser Zahl gleichen, Factoren berechnen. Eine Zahlengröße a auf die reelle $\frac{m}{n}^{te}$ Potenz erheben (wo m und n ganze Zahlen sind), heißt: das Product von m gleichen Factoren berechnen, deren Werth dadurch bestimmt wird, daß die n^{te} Potenz eines jeden gleich a ist. (Es kann hier vorausgesetzt werden, daß der Bruch $\frac{m}{n}$ auf die kleinsten Zahlen reducirt sei.)

Die reelle Wurzel vom Grade m oder $\frac{m}{n}$ aus einer Zahlengröße a ausziehen, heißt: eine Größe suchen, deren reelle Potenz vom Grade m oder $\frac{m}{n}$ gleich a ist. (Dieser Definition gemäß ist die reelle n^{te} Wurzel aus einer Zahlengröße offenbar gleichbedeutend mit der reellen $\frac{1}{n}^{ten}$ Potenz derselben. Ferner läßt sich leicht darthun, daß die Wurzel vom Grade $\frac{n}{m}$ der $\frac{m}{n}^{ten}$ Potenz gleich ist.)

Eine Zahlengröße von a auf die Potenz vom Grade — m

oder $-\frac{m}{n}$ erheben, heißt: die Einheit durch die m^{te} oder $\frac{m}{n}^{te}$ Potenz von a dividiren.

Bei den erwähnten Operationen heißt die Zahl oder Zahlengröße, welche den Grad einer reellen Potenz von a anzeigt, der Exponent dieser Potenz; die Zahl hingegen, welche den Grad einer reellen Wurzel anzeigt, der Wurzelexponent.

Jede Potenz von a, welche einem Exponenten entspricht, dessen Zahlenwerth eine ganze Zahl ist, also einem Exponenten von der Form $+ m$ oder $- m$ (wo m eine ganze Zahl ist), läßt einen einzigen reellen Werth zu, welchen man durch

$$a^m \text{ oder } a^{-m}$$

bezeichnet. — Was die Wurzeln anbelangt und diejenigen Potenzen, deren Exponenten Brüche zu Zahlenwerthen haben, so können sie entweder zwei reelle Werthe, oder nur einen, oder endlich gar keinen reellen Werth zulassen. Die reellen Werthe, von welchen hier die Rede ist, sind nothwendigerweise entweder positive oder negative Größen; aber außer diesen gebraucht man in der Algebra auch noch Symbole, welche an sich keine Bedeutung haben, ihrer Eigenschaften wegen aber Potenzen oder Wurzeln genannt werden. Diese Symbole gehören mit zu denjenigen algebraischen Ausdrücken, welche man im Gegensatze zu den reellen Ausdrücken oder möglichen Größen (unter welchen man die Zahlen und Zahlengrößen versteht) imaginäre Ausdrücke oder unmögliche Größen nennt.

Aus den im siebenten Capitel entwickelten Principien folgt, daß die n^{te} Wurzel aus einer Größe a, desgleichen ihre Potenzen vom Grade $\frac{m}{n}$ und $-\frac{m}{n}$ (wo n eine ganze Zahl, und $\frac{m}{n}$ ein irreductibeler Bruch ist), n verschiedene reelle oder imaginäre Werthe zulassen. In Uebereinstimmung mit den in demselben Capitel eingeführten Bezeichnungen wird man irgend einen dieser Werthe, wenn von der n^{ten} Wurzel die Rede ist, durch

$$\sqrt[n]{a} = ((a))^{\frac{1}{n}},$$

und wenn von der $\frac{m}{n}^{ten}$ oder $-\frac{m}{n}^{ten}$ Potenz die Rede ist, durch

$$((a))^{\frac{m}{n}} \text{ oder } ((a))^{-\frac{m}{n}}$$

bezeichnen. Wir bemerken noch, daß $((a))^{\frac{1}{n}}$ nur ein besonderer Fall von $((a))^{\frac{m}{n}}$ ist, und daß man, wenn A der Zahlenwerth von a ist, für die reellen Werthe von

$$((a))^{\frac{m}{n}}, ((a))^{-\frac{m}{n}}$$

finden wird:

1) wenn n eine ungerade Zahl ist, und

wenn $a = +A$ ist, $\ldots\ldots +A^{\frac{m}{n}}, +A^{-\frac{m}{n}}$,

wenn $a = -A$ ist, $\ldots\ldots -A^{\frac{m}{n}}, -A^{-\frac{m}{n}}$,

2) wenn n eine gerade Zahl ist, und

wenn $a = +A$ ist, $\ldots\ldots \pm A^{\frac{m}{n}}, \pm A^{-\frac{m}{n}}$.

Ist im letztern Falle a negativ, so werden alle Werthe der Ausdrücke $((a))^{\frac{m}{n}}, ((a))^{-\frac{m}{n}}$ imaginär.

Läßt man den Bruch $\frac{m}{n}$ dergestalt seinen Werth verändern, daß er sich beständig einer irrationalen Zahl B nähert, so wächst die Anzahl der imaginären Werthe, welche den Ausdrücken $((a))^{\frac{m}{n}}, ((a))^{-\frac{m}{n}}$ entsprechen, zugleich mit dem Nenner n bis ins Unendliche, mithin können im Calcul die Bezeichnungen

$$((a))^{B}, ((a))^{-B}$$

in diesem Falle nicht zugelassen werden, und die Bezeichnung

$$((a))^{b}$$

würde höchstens eine unendliche Anzahl von imaginären Ausdrücken andeuten, wenn $b = \pm B$ gesetzt würde.

Um diesem Uebelstande vorzubeugen, werden wir die algebraische Bezeichnung $((a))^b$ niemals brauchen wenn b irrational ist. Man wird in diesem Falle jedoch, wenn a einen positiven Werth $+A$ hat, die Bezeichnungen

$$a^b \text{ oder } (a)^b,$$

welche mit $+A^b$ gleichbedeutend sind, gebrauchen können. (Cap. 7. §. 4.)

Die Potenzen der Zahlen und Zahlengrößen haben, wie sich leicht zeigen läßt, mehrere merkwürdige Eigenschaften, von welchen wir einige in folgenden Formeln ausgedrückt finden.

Es seien $a, a', a'', \ldots$ $b, b', b'' \ldots$ beliebige positive oder negative Größen; $A, A', A'' \ldots$ beliebige Zahlen, und $m, m' m'' \ldots$ ganze Zahlen, so ist

$$(3)\quad \begin{cases} A^b A^{b'} A^{b''} \ldots = A^{(b+b'+b''\ldots)}, \\ A^b A'^b A''^b \ldots = (A A' A'' \ldots)^b, \\ (A^b)^{b'} = A^{b \cdot b'}; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} a^{\pm m} \cdot a^{\pm m'} \cdot a^{\pm m''} \ldots = a^{(\pm m \pm m' \pm m''..)} \text{ (Eine jede von den Zahlen } m, m', m'' \text{ muß aber in beiden Theilen der Gleichung dasselbe Zeichen haben.)} \\ a^m \cdot a'^m \cdot a''^m \ldots = (a\, a'\, a'' \ldots)^m; \\ a^{-m} \cdot a'^{-m} \cdot a''^{-m} \ldots = (a\, a'\, a'' \ldots)^{-m}; \\ (a^m)^{m'} = (a^{-m})^{-m'} = a^{m m'}; \\ (a^m)^{-m'} = (a^{-m})^{m'} = a^{-m m'}. \end{cases}$$

Die Formeln (3) und (4) führen auf eine Menge anderer, von welchen wir folgende anzuführen uns begnügen wollen. Man erhält aus der zweiten Formel von (3)

$$A^b \left(\frac{1}{A}\right)^b = (1)^b = 1,$$

woraus sich ergibt:

$$\left(\frac{1}{A}\right)^b = \frac{1}{A^b}.$$

Wenn man demnach zwei positive Größen, von denen die eine das Umgekehrte der andern ist, auf eine und dieselbe Potenz erhebt, so ist auch das eine Resultat das Umgekehrte des andern.

Exponentialgrößen und Logarithmen.

Sieht man in dem Ausdrucke A^x die Zahl A als constant, x hingegen als eine veränderliche Zahlengröße an, so nennt man die Potenz A^x eine Exponentialgröße. Ist unter gleichen Voraussetzungen für einen besonderen Werth von x

$$A^x = B,$$

so nennt man diesen besonderen Werth von x den Logarith-

mus von B, in dem Systeme, dessen Basis (Grundzahl) A ist. Man deutet diesen Logarithmus dadurch an, daß man vor die Zahl B den Buchstaben l oder L schreibt, also durch

$$lB = l\,(B) \text{ oder } LB = L\,(B).$$

Da man jedoch aus dieser Bezeichnung nicht entnehmen kann, von welcher Basis oder von welchem System die Rede ist, so muß dieses besonders mit angeführt werden. Bedient man sich des Zeichens L, um die Logarithmen eines Systems, dessen Basis A ist, zu bezeichnen, so folgt aus der Gleichung

$$A^x = B,$$
$$x = L\,(B).$$

Zuweilen, wenn man es mit Logarithmen aus mehreren Systemen zu thun hat, unterscheidet man dieselben dadurch von einander, daß man dem Buchstaben L einen oder mehrere Accente gibt, und man deutet also durch diesen Buchstaben ohne Accent die Logarithmen eines Systems, durch denselben Buchstaben mit einem Accent die Logarithmen eines andern Systems ꝛc. an.

Geht man von vorstehenden Erklärungen und von den allgemeinen Eigenschaften der Potenzen der Zahlen aus, so sieht man leicht ein: daß 1) der Logarithmus der Einheit in allen Systemen Null ist; 2) daß in allen Systemen, deren Grundzahl größer als 1 ist, jede Zahl, welche größer als 1 ist, einen positiven, jede Zahl hingegen, welche kleiner als 1 ist, einen negativen Logarithmus hat; 3) daß in allen Systemen, deren Basis kleiner als 1 ist, jede Zahl unter 1 einen positiven, jede Zahl über 1 einen negativen Logarithmus hat; 4) daß in zwei Systemen, bei welchen die Grundzahl des einen das Umgekehrte der Grundzahl des andern ist, die Logarithmen einer und derselben Zahl gleich und entgegengesetzt sind. Ferner lassen sich ohne Mühe die Formeln aufstellen, welche die Haupteigenschaften der Logarithmen angeben, und von welchen ich folgende herausheben will.

Sind B, B′, B″, ... C beliebige Zahlen, L, L′ die Zeichen der Logarithmen zweier Systeme, deren Grundzahlen A und A′ sind, und k eine beliebige positive oder negative Größe, so ist auch:

$$(5)\begin{cases} L\,(BB'B''\ldots) = L\,(B) + L\,(B') + L\,(B'') \ldots. \\ L\,(B^k) = kL\,(B); \\ B^{L\,(C)} = A^{L\,(B)\,.\,L\,(C)} = C^{L\,(B)}; \\ \dfrac{L\,(C)}{L\,(B)} = \dfrac{L'\,(C)}{L'\,(B)}. \end{cases}$$

Aus der ersten von diesen Formeln erhält man

$$L(B) + L\left(\frac{1}{B}\right) = L(1) = 0,$$

mithin

$$L\left(\frac{1}{B}\right) = -L(B);$$

woraus folgt, daß die Logarithmen zweier positiven Größen, von welchen die eine das Umgekehrte der andern ist, gleich und entgegengesetzt sind. Es verdient übrigens bemerkt zu werden, daß die vierte Formel sehr leicht aus der zweiten abgeleitet werden kann. Ist nämlich

$$C = B^k,$$

so ist auch

$$L(C) = kL(B),\ L'(C) = kL'(B);$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\frac{L(C)}{L(B)} = \frac{L'(C)}{L'(B)} = k.$$

Setzt man $B = A$, so erhält man aus der vierten Formel (da $L(A) = 1$ ist)

$$L'(C) = L'(A).L(C),$$

und, setzt man der Kürze wegen $L'(A) = \mu$,

$$L'(C) = \mu L(C).$$

Um also von einem System, dessen Basis A ist, zu einem andern überzugehen, dessen Basis A′ ist, darf man nur die Logarithmen, welche dem ersteren angehören, mit einem gewissen Coefficienten μ multipliciren, welcher dem Logarithmus von A in dem zweiten System gleich ist.

Die Logarithmen, von welchen wir gesprochen haben, sind diejenigen, welche man reelle Logarithmen nennt, weil sie sich immer auf positive oder negative Größen reduciren. Aber außer diesen Größen gibt es noch imaginäre Ausdrücke, welche ihrer Eigenschaften wegen ebenfalls Logarithmen heißen. Wir verweisen deshalb auf das neunte Capitel, in welchem wir die Theorie der imaginären Logarithmen vorgetragen haben.

Trigonometrische Linien und Kreisbogen.

Wir haben in den Vorerinnerungen bemerkt, daß eine auf einer geraden oder krummen Linie angenommene Länge bald durch eine Zahl, bald durch eine Zahlengröße bezeichnet werden kann, je nachdem man bloß auf das Maß ihrer Länge Rücksicht nimmt, oder sie

als eine Linie ansieht, welche auf eine andere in einer oder der andern Richtung aufgetragen werden soll (und zwar von einem bestimmten Puncte aus, welchen man den Anfangspunct nennt), um entweder zum Increment oder zum Decrement einer andern, in diesem Puncte sich endigenden Linie zu dienen. Wir haben hinzugefügt, daß man in einem Kreise, dessen Ebene vertical gedacht wird, gewöhnlich den Anfangspunct der Bogen mit dem Endpuncte des von der Linken zur Rechten in horizontaler Richtung gezogenen Radius zusammenfallen läßt, und daß die Bogen, welche von diesem Puncte aus in der Richtung von unten nach oben beschrieben werden, als die positiven angesehen werden; diejenigen hingegen, welche von diesem Puncte aus in der Richtung von oben nach unten beschrieben werden, als die negativen. Endlich haben wir auch über die trigonometrischen Linien gesprochen, welche den Bogen entsprechen, wobei wir annahmen, der Radius des Kreises sei 1. Wir wollen noch einen Augenblick bei diesem Gegenstande verweilen und die Sache etwas weiter ausführen. Zuvörderst wird man in Beziehung auf die von einem gegebenen Anfangspuncte aus auf eine gerade oder krumme Linie aufzutragenden Längen sehr leicht folgende Sätze aufstellen können.

Lehrsatz 6. Es seien a, b, c... beliebige positive oder negative Größen. Um nun auf einer geraden oder krummen Linie, von einem Puncte aus, den Endpunct der Länge

$$a + b + c + \ldots$$

zu finden, welche in derjenigen Richtung aufzutragen ist, die durch das Zeichen von

$$a + b + c + \ldots$$

bestimmt ist, wird man auf der gegebenen Linie 1) vom Anfangspuncte aus, in der durch das Zeichen von a bestimmten Richtung die Länge a auftragen; 2) von dem Endpuncte von a aus, in der durch das Zeichen von b bestimmten Richtung die Länge b; 3) in der durch das Zeichen von c bestimmten Richtung, von dem Endpuncte von b aus, die Länge c; u. s. w.

Lehrsatz 7. Es seien a und b zwei beliebige Zahlengrößen. Soll nun auf einer geraden oder krummen Linie, von einem gegebenen Anfangspuncte aus; 1) eine Länge aufgetragen werden, deren Maß der Zahlenwerth von a ist, und zwar in

der durch das Zeichen von a bestimmten Richtung; 2) in der durch das Zeichen von b bestimmten Richtung eine Linie, deren Maß der Zahlenwerth von b ist: so gelangt man von dem Endpuncte einer dieser Linien zu dem Endpuncte der andern, oder umgekehrt, wenn man eine dritte Länge durchläuft, deren Maß der Zahlenwerth der Differenz a—b ist.

Lehrsatz 8. Unter denselben Voraussetzungen wird der Endpunct der Länge $\frac{a+b}{2}$ auf der gegebenen Linie von den Endpuncten der Längen a und b gleich weit entfernt sein, wenn die Abstände auf der Linie selbst genommen werden.

Wir wollen nun diese Lehrsätze auf die Bogen eines Kreises anwenden, dessen Ebene vertical, und dessen Radius 1 ist. Der Anfangspunct der Bogen falle mit dem Endpuncte des von der Linken zur Rechten in horizontaler Richtung gezogenen Halbmessers zusammen. Bezeichnet man, wie es gebräuchlich ist, durch π das Verhältniß der Peripherie znm Durchmesser, so ist, wenn dieser Durchmesser 2 ist, die ganze Peripherie 2π, die halbe Peripherie π, und ihr vierter Theil $\frac{\pi}{2}$. Bezeichnet man ferner durch a irgend einen positiven oder negativen Bogen, so folgt aus dem 6ten Lehrsatze, daß man, um den Endpunct des Bogens

$$a + 2m\pi \text{ oder } a - 2m\pi$$

zu erhalten (wo m eine ganze Zahl ist), auf die Peripherie von dem Endpuncte von a aus, entweder in der Richtung der positiven Bogen, oder in der der negativen, die Länge $2m\pi$ auftragen muß, d. h. daß man von dem Endpuncte von a aus m mal die ganze Peripherie in einer oder der andern Richtung durchlaufen muß, was nothwendigerweise wieder auf den Punct zurückführt, von welchem man ausgegangen ist. Hieraus folgt: daß die Endpuncte von

$$a \text{ und } a \pm 2m\pi$$

zusammenfallen.

Eben so folgt aus Lehrsatz 6. oder 7: 1) daß die Endpuncte der Bogen

$$a \text{ und } a \pm \pi$$

um einen Bogen gleich π von einander entfernt sind und demnach mit den Endpuncten eines und desselben Durchmessers zu-

sammenfallen; 2) daß die Endpuncte der Bogen

$$a \text{ und } a \pm \frac{\pi}{2},$$

um den vierten Theil der Peripherie von einander abstehen und also mit den Endpuncten zweier auf einander senkrecht stehenden Radien zusammenfallen. — Endlich folgt aus Lehrs. 8: 1) daß die Endpuncte der Bogen

$$a \text{ und } \pi - a$$

gleichweit von dem Endpuncte des Bogens

$$\frac{\pi}{2}$$

abstehen; 2) daß die Endpuncte der Bogen

$$a \text{ und } \frac{\pi}{2} - a$$

gleichweit von dem Endpuncte des Bogens $\frac{\pi}{4}$ entfernt sind.

Die Bogen $\pi - a$ und $\frac{\pi}{2} - a$, von welchen hier die Rede ist, werden respective das Supplement und das Complement des Bogens a genannt; mit andern Worten: zwei durch a und b bezeichnete Bogen sind einer des andern Supplement oder Complement, je nachdem

$$a + b = \pi, \text{ oder } a + b = \frac{\pi}{2}$$

ist. —

Da die Centriwinkel, deren einer Schenkel der durch den Anfangspunct der Bogen gezogene Halbmesser ist, in demselben Verhältnisse zu- oder abnehmen, in welchem dies bei den Bogen, durch welche sie gemessen werden, der Fall ist, und da jeder dieser Winkel selbst als Increment oder Decrement irgend eines andern angesehen werden kann, so hindert uns nichts, sie durch dieselben Größen zu bezeichnen, durch welche die Bogen bezeichnet werden. Man hat dies in der That allgemein angenommen und sagt daher auch: von zwei Winkeln sei der eine das Complement oder Supplement des andern, wenn der eine der ihnen entsprechenden Bogen das Complement oder Supplement des andern ist. Wir wollen gegenwärtig die trigonometrischen Linien näher betrachten und in dieser Absicht einen einzigen Bogen betrachten, den wir durch a bezeichnen wollen. Projicirt man denselben successive 1) auf den verticalen Durchmesser, 2) auf den horizontalen Durchmesser, so sind die beiden

Projectionen diejenigen Linien, welche man den Sinus und den Sinusverſus des Bogens a nennt. Es kann noch bemerkt werden, daß der erſtere zugleich die Projection des durch den Endpunct des Bogens gehenden Halbmeſſers auf den verticalen Durchmeſſer iſt. Verlängert man dieſen Halbmeſſer bis zum Durchſchnitte mit der durch den Anfangspunct der Bogen geführten Tangente, ſo heißt das Stück dieſer Tangente, welches zwiſchen dem Anfangspuncte des Bogens und dem erwähnten Durchſchnittspuncte liegt, die trigonometriſche Tangente des Bogens a. Endlich heißt der Abſtand deſſelben Durchſchnittspunctes vom Mittelpuncte des Kreiſes die trigonometriſche Secante des Bogens.

Der Coſinus, Coſinusverſus, die Cotangente und Coſecante eines Bogens ſind nichts anderes als der Sinus, Sinusverſus, die Tangente und die Secante ſeines Complements und bilden mit dem Sinus, dem Sinusverſus, der Tangente und Secante des Bogens das vollſtändige Syſtem ſeiner trigonometriſchen Linien.

Nach dem oben Geſagten fällt der Sinus eines Bogens in den verticalen Durchmeſſer, der Sinusverſus in den horizontalen, die Tangente in eine durch den Anfangspunct der Bogen geführte Berührungslinie, und die Secante in die durch den Endpunct des gegebenen Bogens gehende Centrallinie. Ferner iſt der gemeinſchaftliche Anfangspunct der Sinus und der Secanten der Mittelpunct des Kreiſes, während der der Tangenten und Sinusverſus mit dem der Bogen zuſammenfällt. Endlich iſt man allgemein dahin übereingekommen, die trigonometriſchen Linien des Bogens a dann durch poſitive Zahlengrößen zu bezeichnen, wenn dieſer Bogen poſitiv und kleiner als der vierte Theil der Peripherie iſt; woraus denn folgt: daß poſitive Sinus und Tangenten von ihrem Anfangspuncte aus nach oben fallen, der Sinusverſus hingegen von der Rechten zur Linken, und daß endlich die poſitive Secante mit dem durch den Endpunct des Bogens a gehenden Radius einerlei Richtung hat.

Geht man von dieſen Principien aus, ſo ſieht man leicht ein, daß der Sinusverſus und alſo auch der Coſinusverſus beſtändig poſitiv ſind; auch wird man ohne Mühe die Zeichen beſtimmen können, mit welchen die anderen trigonometriſchen Linien eines Bogens, deſſen Endpunct gegeben iſt, behaftet ſein müſſen. Um dieſe Beſtimmung zu erleichtern, denkt man ſich den Kreis durch zwei aufeinander ſenkrecht ſtehende Durchmeſſer, von welchen der eine horizontal, der andere vertical iſt,

in vier gleiche Theile getheilt, und diese vier Theile werden respective „der erste, zweite, dritte und vierte Quadrant" genannt. Die beiden ersten Quadranten liegen oberhalb des horizontalen Durchmessers; der erste zur rechten, der zweite zur linken Hand. Die letzten beiden Quadranten liegen unterhalb des genannten Durchmessers; der dritte zur linken, der vierte zur rechten Hand. Da nun die Endpuncte der beiden Bogen, von welchen der eine das Complement des anderen ist, gleichweit von dem Endpuncte des Bogens $\frac{\pi}{4}$ abstehen, so haben sie einerlei Lage gegen den durch die Mittelpuncte des ersten und des dritten Quadranten gehenden Durchmesser. Sucht man ferner die Zeichen der von dem Sinusversus und Cosinusversus verschiedenen trigonometrischen Linien eines Bogens, dessen Endpunct in einen oder den anderen Quadranten fällt, für jeden der vier hier möglichen Fälle zu bestimmen, so findet man, daß diese Zeichen respective folgende sind:

	im 1sten Quadranten,	im 2ten,	im 3ten,	im 4ten
für sin. u. cosec.....	+	+	—	—
für cos. u. sec.....	+	—	—	+
für tang. u. cot.	+	—	+	—.

Es verdient bemerkt zu werden, daß das Zeichen der Tangente und Cotangente stets dem Producte der Zeichen des Sinus und Cosinus gleich ist.

Aus vorstehenden Betrachtungen geht auch noch hervor: 1) daß der Cosinus eines Bogens die Projection des durch den Endpunct des letztern gehenden Radius auf den horizontalen Durchmesser ist, und daß er auf diesem Durchmesser, vom Mittelpuncte aus, als seinem Anfangspuncte, gerechnet, positiv ist, wenn er von der Linken zur Rechten geht; 2) daß der Cosinusversus die Linie zwischen dem oberen Endpuncte des verticalen Durchmessers (und dieser Punct ist sein Anfangspunct) und dem Endpuncte des Sinus ist; 3) daß die positive Cotangente auf der durch den Anfangspunct der Cosinusversus gehenden horizontalen Tangente von der Linken zur Rechten geht und derjenige Theil dieser Tangente ist, welcher zwischen dem genannten Anfangspuncte und dem Durchschnittspuncte der Tangente mit der durch den Endpunct des Bogens gehenden Centrallinie liegt; 4) daß die zwischen dem Mittelpuncte des Kreises und dem Endpuncte der Cotangente liegende Cosecante positiv ist, wenn sie mit dem nach dem Endpuncte des Bogens gezogenen Radius einerlei Richtung hat.

Die Zeichen, vermittelst deren man die trigonometrischen Linien und die denselben entsprechenden Bogen andeutet, sind in den Vorerinnerungen bereits angegeben worden. Wir wollen uns daher gegenwärtig auf die Bemerkung beschränken, daß die trigonometrischen Linien eines Bogens auch als dem Centriwinkel zugehörig angesehen werden, dessen Maß der Bogen ist, und welchen man durch dieselbe Zahlengröße bezeichnet. Wenn daher a, b,.... beliebige Zahlengrößen sind, so ist sin. a der Sinus des Bogens oder Winkels a; cos. b der Cosinus des Bogens oder Winkels b ꝛc.

Wir wollen, bevor wir diese Note schließen, noch an einige merkwürdige Eigenschaften der trigonometrischen Linien erinnern.

Bedeutet a eine beliebige Zahlengröße, so besteht zwischen dem Sinus und dem Cosinus des Winkels a stets die Gleichung

$$(6) \qquad \sin. a^2 + \cos. a^2 = 1,$$

und die übrigen trigonometrischen Linien können durch den Sinus und Cosinus auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$(7) \begin{cases} \text{sin. vers. } a = 1 - \cos. a; \ \text{tang. } a = \dfrac{\sin. a}{\cos. a}; \ \text{sec. } a = \dfrac{1}{\cos. a}; \\ \text{cos. vers. } a = 1 - \sin. a; \ \text{cot. } a = \dfrac{\cos. a}{\sin. a}; \ \text{cosec. } a = \dfrac{1}{\sin. a}. \end{cases}$$

Aus (6) und (7) lassen sich leicht mehrere andere Gleichungen ableiten, z. B.

$$(8) \begin{cases} \text{cot. } a = \dfrac{1}{\text{tang. } a}; \ \sec. a^2 = 1 + \text{tang. } a^2; \ \text{cosec. } a^2 \\ \qquad = 1 + \cot. a^2. \end{cases}$$

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn R die Länge einer zwischen zweien Puncten liegenden geraden Linie ausdrückt, α hingegen den spitzen oder stumpfen Winkel, welchen diese Linie mit einer gegebenen Axe macht, die Projection der gegebenen Länge auf diese Axe zu ihrem Maße den Zahlenwerth des Productes

$$R \cos. \alpha$$

haben wird, und daß das Maß der Projection derselben Länge auf eine gerade Linie, welche auf der Axe senkrecht steht,

$$R \sin. \alpha$$

sein wird. Endlich sieht man auch ohne Mühe ein, daß, wenn man in der Peripherie eines Kreises, dessen Radius 1 ist, willkürlich einen Punct annimmt und von diesem Puncte aus

nach einer oder der andern Seite hin einen Bogen abschneidet, dessen Maß dem Zahlenwerthe einer beliebigen Zahlengröße c gleich ist, der kleinste zwischen seinen Endpuncten liegende Bogen kleiner oder größer als $\frac{\pi}{2}$ sein wird, je nachdem cos. c positiv oder negativ ist.

Gesetzt, man bestimme in der Peripherie des Kreises, von welchem die Rede ist: 1) die Endpuncte (A) und (B) der Bogen, welche durch zwei beliebige Zahlengrößen a und b bezeichnet werden, 2) den Endpunct (N) eines dritten Bogens gleich $\frac{a+b}{2}$. Es sei ferner (M) der Mittelpunct der Sehne zwischen (A) und (B), und ein gewisser Punct (P), welcher in dem horizontalen Durchmesser liegt, sei die Projection des Punctes (M) auf diesen Durchmesser. Sind nun die auf den letzteren, vom Mittelpuncte des Kreises aus, von der Linken zur Rechten hin aufgetragenen Linien positiv, so muß der Abstand des Punctes (P) vom Centrum, nach Lehrsatz 8.,

$$\frac{\text{cos. a} + \text{cos. b}}{2}$$

sein. Da ferner nach demselben Lehrsatze der Punct (N) gleichweit von (A) und (B) absteht, so muß der durch (N) gezogene Durchmesser auch die Sehne $\overline{AB}$ in (M) halbiren, und die Entfernung dieses Punctes (M) vom Mittelpuncte des Kreises ist, abgesehen vom Zeichen, dem Cosinus des Bogens $\overline{NA}$ und des Bogens $\overline{NB}$ gleich, oder, was dasselbe ist, den Größen

$$\text{cos.}\left(\frac{a+b}{2} - a\right) = \text{cos.}\left(\frac{a+b}{2} - b\right) = \text{cos.}\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Um die horizontale Projection dieses Abstandes zu erhalten, darf man denselben nur mit dem Cosinus des spitzen Winkels multipliciren, welcher zwischen dem horizontalen und dem durch den Punct (N) gezogenen Durchmesser liegt, also mit einem Factor, welcher, abgesehen vom Zeichen, gleich $\text{cos.}\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ist; mit andern Worten: der Abstand des Punctes (P) vom Centrum hat zum Maße den Zahlenwerth des Productes

$$\text{cos.}\left(\frac{a-b}{2}\right) . \text{cos.}\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Dieses Product wird positiv oder negativ sein, je nachdem der

Punct (M) rechts oder links vom verticalen Durchmesser liegt. Der Factor $\cos.\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ist positiv oder negativ, je nachdem der Punct (N) rechts oder links von diesem Durchmesser liegt; der Factor $\cos.\left(\frac{a-b}{2}\right)$ kann gleichfalls positiv oder negativ sein. Mithin hat das Product

$$\cos.\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos.\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

entweder einerlei Zeichen mit $\cos.\frac{a+b}{2}$, oder das entgegengesetzte Zeichen, je nachdem die Bogen $\overline{NA}$ und $\overline{NB}$ kleiner oder größer als $\frac{\pi}{2}$ sind, oder, je nachdem die Puncte (M) und (N) auf einer und derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten liegen. Da übrigens die Puncte (M) und (P) in einer und derselben verticalen Linie liegen, so folgt aus der vorstehenden Betrachtung, daß der Abstand des Punctes (P) vom Centrum selbst dann durch

$$\cos.\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos.\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ausgedrückt werden kann, wenn man auf die Zeichen Rücksicht nimmt. Dieses Product und die Größe $\frac{\cos. a + \cos. b}{2}$ haben demnach einerlei Zeichen und Werth, und es ist daher für alle möglichen Werthe von a und b

$$(9)\quad \cos. a + \cos. b = 2\cos.\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos.\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Setzt man in (9), $\pi + b$ für b, so erhält man

$$(10)\quad \cos. a - \cos. b = 2\sin.\left(\frac{a-b}{2}\right).\sin.\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Substituirt man ferner in (9) und (10) für a und b ihre Complemente $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} - b$, so findet man

$$(11)\begin{cases}\sin. a + \sin. b = 2\cos.\left(\frac{a-b}{2}\right).\sin.\left(\frac{a+b}{2}\right),\\ \sin. a - \sin. b = 2\sin.\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos.\left(\frac{a+b}{2}\right).\end{cases}$$

Aus (9), (10), (11) lassen sich wieder eine Menge von Formeln ableiten, z. B.

$$(12)\begin{cases}\dfrac{\sin.\,a-\sin.\,b}{\sin.\,a+\sin.\,b}=\dfrac{\tang.\,\frac{1}{2}(a-b)}{\tang.\,\frac{1}{2}(a+b)};\\[2ex] \dfrac{\cos.\,b-\cos.\,b}{\cos.\,b+\cos.\,a}=\tang.\,\frac{1}{2}(a-b).\tang.\,\frac{1}{2}(a+b),\end{cases}$$

$$(13)\begin{cases}\cos.\,(a-b)+\cos.\,(a+b)=2\cos.\,a\cos.\,b,\\ \cos.\,(a-b)-\cos.\,(a+b)=2\sin.\,a\sin.\,b,\end{cases}$$

$$(14)\begin{cases}\sin.\,(a+b)+\sin.\,(a-b)=2\sin.\,a\cos.\,b,\\ \sin.\,(a+b)-\sin.\,(a-b)=2\sin.\,b\cos.\,a,\end{cases}$$

$$(15)\begin{cases}\cos.\,(a\pm b)=\cos.\,a\cos.\,b\mp\sin.\,a\sin.\,b,\\ \sin.\,(a\pm b)=\sin.\,a\cos.\,b\pm\sin.\,b\cos.\,a,\end{cases}$$

$$(16)\quad \tang.\,(a\pm b)=\frac{\tang.\,a\pm\tang.\,b}{1\mp\tang.\,a\tang.\,b}.$$

$$(17)\begin{cases}\cos.\,2a=\cos.\,a^2-\sin.\,a^2=2\cos.\,a^2-1\\ =1-2\sin.\,a^2,\\ \sin.\,2a=2\sin.\,a\cos.\,a.\end{cases}$$

Es seien a, b, c drei beliebige Winkel, so erhält man aus (13)

$$(18)\begin{cases}\cos.\,(a+b+c)+\cos.\,(b+c-a)+\cos.\,(c+a-b)\\ +\cos.\,(a+b-c)=4\cos.\,a\cos.\,b\cos.\,c\end{cases}$$

Setzt man in (18), $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ für a, b, c, und setzt man sodann

$$(19)\qquad a+b+c=\pi,$$

so findet man

$$(20)\quad \sin.\,a+\sin.\,b+\sin.\,c=4\cos.\frac{a}{2}\cos.\frac{b}{2}\cos.\frac{c}{2}.$$

Unter derselben Voraussetzung ergibt sich aus (16)

$$(21)\quad \tang.\,a+\tang.\,b+\tang.\,c=\tang.\,a\tang.\,b\tang.\,c.$$

Da die Gleichungen (19) und (20) auch dann noch gelten müssen, wenn man für a, b, c ihre Supplemente setzt und das Zeichen der dritten Größe in das entgegengesetzte verwandelt, so ist auch

$$(22)\begin{cases}\sin.\,b+\sin.\,c-\sin.\,a=4\cos.\frac{a}{2}.\sin.\frac{b}{2}.\sin.\frac{c}{2}.\\ \sin.\,c+\sin.\,a-\sin.\,b=4\sin.\frac{a}{2}.\cos.\frac{b}{2}.\sin.\frac{c}{2},\\ \sin.\,a+\sin.\,b-\sin.\,c=4\sin.\frac{a}{2}.\sin.\frac{b}{2}.\cos.\frac{c}{2}.\end{cases}$$

Combinirt man dieſe Formeln mit einander und mit (20), ſo erhält man

$$(23)\begin{cases}\cos.\frac{1}{2}a^2 = \dfrac{(\sin.a+\sin.b+\sin.c)(\sin.b+\sin.c-\sin.a)}{4.\sin.b.\sin.c},\\ \sin.\frac{1}{2}a^2 = \dfrac{(\sin.c+\sin.a-\sin.b)(\sin.a+\sin.b-\sin.c)}{4.\sin.b.\sin.c}.\end{cases}$$

Sind endlich a, b, c die drei Winkel eines Dreiecks, und ſind die denſelben entgegengeſetzten Seiten A, B, C, ſo drücken die ſechs Producte

$$B.\sin.c = C.\sin.b,\ C\sin.a = A\sin.c,\ A\sin.b = B\sin.a$$

die von den drei Ecken auf die drei Seiten gefällten Perpendikel aus. Ferner iſt

$$(24)\qquad \frac{\sin.a}{A} = \frac{\sin.b}{B} = \frac{\sin.c}{C},$$

und die Gleichungen (23) verwandeln ſich demnach in:

$$(25)\begin{cases}\cos.\frac{1}{2}a^2 = \dfrac{(A+B+C)(B+C-A)}{4BC},\\ \sin.\frac{1}{2}a^2 = \dfrac{(C+A-B)(A+B-C)}{4BC}.\end{cases}$$

Mit Bezugnahme auf die Formeln (19) und (24) erhält man aus der erſten Gleichung von (12)

$$(26)\qquad \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{A-B}{A+B}.\ \cot.\tfrac{1}{2}c.$$

Die Formeln (19), (24), (25) und (26) reichen hin, um drei von den ſechs Elementen eines geradlinigen Dreiecks aus den drei anderen zu beſtimmen, wenn anders dieſe Beſtimmung möglich iſt. Es verdient bemerkt zu werden, daß die mit Hülfe der Formeln (17) aus den Gleichungen (25) abgeleiteten Werthe von cos. a und sin. a reſpective

$$(27)\begin{cases}\cos.a = \dfrac{B^2+C^2-A^2}{2BC},\\ \sin.a = \dfrac{\sqrt{(A+B+C)(B+C-A)(C+A-B)(A+B-C)}}{2BC}\end{cases}$$

sind. Den ersten von diesen Werthen kann man auch direct aus einem bekannten Lehrsatze der Geometrie ableiten. Was den zweiten anbetrifft, so bietet er uns ein Mittel dar, um den Inhalt eines Dreiecks als Function seiner drei Seiten auszudrücken. Da nämlich dieser Inhalt gefunden wird, wenn man die Grundlinie C mit der halben Höhe, also mit $\frac{1}{2}$ B sin. a multiplicirt, so ist derselbe

$$(28) \qquad \tfrac{1}{2}\,B\,C \sin. a =$$

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(A+B+C)\,(B+C-A)\,(A+C-B)\,(A+B-C)}.$$

Zweite Note.

Von den Formeln, welche aus dem Gebrauche des Zeichens $>$ oder $<$ entspringen, und von den Mitteln zwischen mehreren Größen.

Es seien a und b zwei ungleiche Größen, so kann man sich der Formeln

$$a > b, \quad b < a$$

bedienen, um anzudeuten, daß a größer als b ist, d. h. daß die Differenz $a - b$ positiv ist. Geht man von diesem Princip aus, so kann man ohne Mühe folgende Lehrsätze aufstellen.

Lehrsatz 1. Sind die Größen a, a′, a″...., b, b′, b″.... folgenden Bedingungen unterworfen,

$$a > b,$$
$$a' > b',$$
$$a'' > b'',$$
$$\text{etc.....},$$

so ist auch

$$a + a' + a'' \ldots > b + b' + b'' \ldots$$

Beweis. Sind die Größen

$$a - b, \; a' - b', \; a'' - b'', \; \text{etc....}$$

positiv, so muß es ihre Summe

$$a + a' + a'' .... - (b + b' + b'' ....)$$

gleichfalls sein.

Lehrsatz 2. Sind die Zahlen A, A′, A″,...., B, B′, B″... den Bedingungen

$$A > B,$$
$$A' > B',$$
$$A'' > B'',$$
etc.....,

unterworfen, so ist auch

$$A\,A'\,A''\ldots > B\,B'\,B''\ldots$$

Beweis. Da die Differenzen

$$A-B,\ A'-B',\ A''-B'',\ldots$$

der Annahme gemäß positiv sind, so müssen auch die Producte

$$(A-B)\,A'\,A''\ldots = A\,A'\,A''\ldots - B\,A'\,A''\ldots,$$
$$B\,(A'-B')\,A''\ldots = B\,A'\,A''\ldots - B\,B'\,A''\ldots,$$
$$B\,B'\,(A''-B'')\ldots = B\,B'\,A''\ldots - B\,B'\,B''\ldots,$$
etc.....,

positiv sein, mithin wird es auch ihre Summe

$$A\,A'\,A''\ldots - B\,B'\,B''\ldots$$

sein.

Lehrsatz 3. Es seien a, b, r beliebige Größen, und

$$a > b,$$

so ist, wenn r positiv ist,

$$ra > rb,$$

und wenn r negativ ist,

$$ra < rb.$$

Beweis. Das Product

$$r\,(a-b) = ra - rb$$

ist in der That im ersten Falle positiv, im zweiten negativ.

Zusatz. Sind a und b positiv, und setzt man successive

$$r = \frac{1}{a},\ r = \frac{1}{b},$$

so erhält man

$$1 > \frac{b}{a},\ \frac{a}{b} > 1.$$

Man kommt hier auf den an sich evidenten Satz zurück, daß ein Bruch größer oder kleiner als 1 ist, je nachdem der Zähler größer als der Nenner, oder der Nenner größer als der Zähler ist.

Lehrsatz 4. Es seien A und A' Zahlen, und

$$A > A';$$

b sei eine beliebige Größe, so ist, wenn b positiv ist,

$$A^b > A'^b,$$

und wenn b negativ ist,

$$A^b < A'^b.$$

Beweis. Da der Quotient $\frac{A}{A'} > 1$ ist, so ist offenbar der Bruch

$$\frac{A^b}{A'^b} = \left(\frac{A}{A'}\right)^b$$

größer oder kleiner als 1, je nachdem b positiv oder negativ ist.

Lehrsatz 5. Es sei A eine beliebige Zahl, b, b′ Größen, welche der Bedingung

$$b > b'$$

unterworfen sind, so ist, wenn $A > 1$ ist,

$$A^b > A^{b'},$$

und wenn $A < 1$ ist,

$$A^b < A^{b'}.$$

Beweis. Da die Differenz $b - b'$ der Annahme gemäß positiv ist, so ist der Bruch

$$\frac{A^b}{A^{b'}} = A^{b-b'}$$

offenbar größer oder kleiner als 1, je nachdem $A > 1$ oder $A < 1$ ist.

Lehrsatz 6. Es sei L das Zeichen der Logarithmen eines Systems, dessen Grundzahl A ist, und B, B′ zwei Zahlen, welche der Bedingung

$$B > B'$$

unterworfen sind, so ist, wenn $A > 1$ ist,

$$L(B) > L(B'),$$

und wenn $A < 1$ ist,

$$L(B) < L(B').$$

Beweis. Der Logarithmus

$$L\left(\frac{B}{B'}\right) = L(B) - L(B')$$

wird in der That im ersten Falle positiv, im zweiten negativ sein.

Zusatz. Bedient man sich des Zeichens l, um anzudeuten, daß man die natürlichen Logarithmen meine, bei welchen die Grundzahl, nach Cap. 6. §. 1., Gleichung (5),

$e = 2{,}7182818\ldots$ ist, so ist auch für

$$B > B',$$
$$1B > 1B'.$$

Wir wollen zu den vorstehenden Lehrsätzen noch folgenden hinzufügen, aus welchem sich mehrere wichtige Wahrheiten ableiten lassen.

Lehrsatz 7. Es sei x eine beliebige von Null verschiedene Größe, so ist

$$(2) \qquad 1 + x < e^x,$$

wo e, wie gewöhnlich, die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Beweis. Da der zweite Theil der Formel (2) immer positiv bleibt, so ist unser Satz an sich evident, wenn $1 + x$ negativ ist. Wir brauchen also nur noch den Fall zu untersuchen, wo

$$(3) \qquad 1 + x > 0 \text{ ist.}$$

Nun ist aber, nach Cap. 6., §. 4., Gleich. (23),

$$(4) \quad \begin{cases} e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.} \\ = 1 + x + \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x}{3}\right) + \frac{x^4}{2.3.4}\left(1 + \frac{x}{5}\right) + \text{etc.}\ldots, \end{cases}$$

und da die Producte

$$\frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x}{3}\right), \ \frac{x^4}{2.3.4}\left(1 + \frac{x}{5}\right), \ \text{etc.}\ldots$$

nicht allein dann positiv sind, wenn x positiv ist, sondern auch dann, wenn x negativ und kleiner als 1 ist, so folgt, so oft der Bedingung (3) Genüge geleistet wird, aus (4)

$$e^x > 1 + x.$$

Zusatz 1. Ist $1 + x$ positiv, und nimmt man die natürlichen Logarithmen von beiden Theilen der Formel (2), so erhält man nach Lehrs. 6., Zus.

$$(5) \qquad 1(1 + x) < x;$$

eine Formel, welche immer gilt, wenn ihr erster Theil reell ist.

Zusatz 2. Es sei

$$(6) \quad 1 + x > 0, \ 1 + y > 0, \ 1 + z > 0, \ \text{etc.}\ldots,$$

so ist nach Formel (2)

$$1 + x < e^x, \ 1 + y < e^y, \ 1 + z < e^z \ \text{etc.}\ldots,$$

mithin nach Lehrs. 2.

(7) $(1+x)(1+y)(1+z)\ldots < e^{(x+y+z\ldots)}$

eine Formel, welche so lange gilt, als die Factoren des ersten Theiles positiv sind.

Zusatz 3. Setzt man im vorigen Zusatz

$$x = a\alpha,\ y = a'\alpha',\ z = a''\alpha'',\ldots,$$

wo α, α', $\alpha''\ldots$ positive Größen, und die Größen a, a′, a″... respective größer als

$$-\frac{1}{\alpha},\ -\frac{1}{\alpha'},\ -\frac{1}{\alpha''},\ \ldots$$

sind, so verwandelt sich die Formel (7) in

$$(1+a\alpha)(1+a'\alpha')(1+a''\alpha'')\ldots < e^{(a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''\ldots)}$$

Sind ferner die Größen a, a′, a″,... sämmtlich kleiner als eine gewisse Grenze A, so ist nach Lehrsatz 1 und 2.

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha''\ldots < A(\alpha+\alpha'+\alpha''\ldots),$$

mithin auch

(8) $(1+a\alpha)(1+a'\alpha')(1+a''\alpha'')\ldots < e^{A(\alpha+\alpha'+\alpha''\ldots)}$

Die Formel (8) läßt sich mit Vortheil bei der näherungsweisen Integration der Differentialgleichungen anwenden.

Wir wollen gegenwärtig zu denjenigen Lehrsätzen übergehen, in welchen von mittleren Größen (Mitteln) die Rede ist. Eine mittlere Größe (ein Mittel) zwischen mehreren gegebenen Größen ist, wie wir bereits aus den Vorerinnerungen wissen, eine neue Größe, welche zwischen der kleinsten und der größten unter den gegebenen Größen liegt. Dieser gegebenen Erklärung gemäß ist h das Mittel zwischen den beiden Größen g, k, oder ein Mittel zwischen mehreren Größen, unter welchen jene beiden die größte und die kleinste sind, wenn die beiden Differenzen

$$g-h,\ h-k$$

einerlei Zeichen haben. Bedient man sich nun zur Bezeichnung eines Mittels zwischen den Größen a, a′, a″..., wie in den Vorerinnerungen geschah, der Bezeichnungsart

(9) $M(a, a'\ a''\ldots.)$,

so wird man ohne Mühe folgende Sätze aufstellen können.

Lehrsatz 8. Es sei

$$h = M(a, a', a''\ldots),$$

und r eine beliebige Größe, so ist beständig

(10) $rh = M(ra, ra', ra'',\ldots)$.

Beweis. Ist g die größte, und k die kleinste unter den Größen a, a′, a″..., so werden die Differenzen

$$g - h,\ h - k,$$

einerlei Zeichen haben, und zwar werden sie positiv sein; mithin haben auch die Producte

$$r(g - h),\ r(h - k),$$

oder mit andern Worten: die Differenzen

$$rg - rh,\ rh - rk$$

einerlei Zeichen. Es ist demnach

$$rh = M(rg, rk),$$

also auch

$$rh = M(ra, ra', ra'', \ldots),$$

indem rg, rk nothwendigerweise mit unter den Producten ra, ra' ra'',... vorkommen und dem größten und kleinsten derselben gleich sein müssen.

Lehrsatz 9. Es sei

$$H = M(A, A', A'' \ldots), \tag{11}$$

wo H, A, A', A'',... Zahlen sind; ferner sei b eine beliebige Größe; so ist

$$H^b = M(A^b, A'^b, A''^b \ldots). \tag{12}$$

Beweis. G und K seien die größte und die kleinste unter den Zahlen A, A', A'',...; so sind die Differenzen

$$G - H,\ H - K$$

positiv, und die Ausdrücke

$$G^b - H^b,\ H^b - K^b$$

haben nach dem vierten Lehrsatze einerlei Zeichen. Es ist demnach

$$H^b = M(G^b, K^b),$$

also auch

$$H^b = M(A^b, A'^b, A''^b \ldots).$$

Zusatz. Setzt man $b = \frac{1}{2}$, so erhält man

$$\sqrt{H} = M(\sqrt{A}, \sqrt{A'}, \sqrt{A''}, \ldots).$$

Lehrsatz 10. Ist A eine beliebige Zahl; sind ferner b, b', b'',... beliebige Größen, und ist

$$h = M(b, b', b'' \ldots), \tag{13}$$

so ist auch

$$A^h = M(A^b, A^{b'}, A^{b''}, \ldots). \tag{14}$$

Beweis. Ist g die größte, und k die kleinste unter den Größen b, b', b'',..., so sind die Differenzen

$$g - h,\ h - k$$

positiv; mithin haben auch nach Lehrs. 5. die Ausdrücke

$$A^g - A^h,\ A^h - A^k$$

einerlei Zeichen. Es ist demnach

$$A^h = M(A^g, A^k) = M(A^b, A^{b'}, A^{b''} \ldots).$$

Lehrsatz 11. Es sei A die Basis eines Logarithmensystems, L das Zeichen der Logarithmen desselben, und B, B′, B″...H, Zahlen von der Beschaffenheit, daß

$$(15) \qquad H = M(B, B', B'' \ldots)$$

ist, so ist auch für jeden Werth von A,

$$(16) \qquad L(H) = M[L(B), L(B'), L(B'')\ldots].$$

Beweis. Es sei G die größte, und K die kleinste unter den Zahlen B, B′, B″,..., so werden, da die Brüche

$$\frac{G}{H}, \frac{H}{K}$$

größer als 1 sind, auch die Logarithmen

$$L\left(\frac{G}{H}\right), L\left(\frac{H}{K}\right),$$

oder, was dasselbe ist, die Differenzen

$$L(G) - L(H), L(H) - L(K)$$

einerlei Zeichen haben. Es ist demnach

$$L(H) = M[L(G), L(K)]$$
$$= M[L(B), L(B'), L(B'')\ldots].$$

Lehrsatz 12. Es seien b, b′, b″.... mehrere Größen von einerlei Zeichen; ihre Anzahl sei n, und a, a′, a″.... seien ebensoviele beliebige Größen; so ist

$$(17) \qquad \frac{a + a' + a'' \ldots}{b + b' + b'' \ldots} = M\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''} \ldots\right).$$

Beweis. Es sei g die größte, k die kleinste unter den Größen

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''} \ldots,$$

so sind die Differenzen

$$g - \frac{a}{b} \text{ und } \frac{a}{b} - k,$$

$$g - \frac{a'}{b'} \text{ und } \frac{a'}{b'} - k,$$

$$g - \frac{a''}{b''} \text{ und } \frac{a''}{b''} - k,$$

etc.....

sämmtlich positiv. — Multiplicirt man die beiden ersten mit b, die beiden folgenden mit b′ ꝛc...., so erhält man die Producte

$$\begin{aligned} &gb - a \text{ und } a - kb,\\ &gb' - a' \text{ und } a' - kb',\\ &gb'' - a'' \text{ und } a'' - kb'',\\ &\text{etc.}\ldots, \end{aligned}$$

welche einerlei Zeichen haben werden, so gut als die Größen b, b′, b″.... Die Summen dieser Producte, also

$$\begin{aligned} &g(b+b'+b''+\ldots)-(a+a'+a''\ldots),\\ &(a+a'+a''\ldots)-k(b+b'+b''\ldots), \end{aligned}$$

und die Quotienten, welche man erhält, wenn man diese Summen durch $(b+b'+b''\ldots)$ dividirt, also

$$g-\frac{a+a'+a''\ldots}{b+b'+b''\ldots},\quad \frac{a+a'+a''\ldots}{b+b'+b''\ldots}-k,$$

werden daher gleichfalls Größen von einerlei Zeichen sein; woraus denn also folgt, daß

$$\frac{a+a'+a''\ldots}{b+b'+b''\ldots}=M(g,k)=M\left(\frac{a}{b},\frac{a'}{b'},\frac{a''}{b''}\ldots\right),$$

ist. (Siehe Vorerinnerungen, Lehrs. 1 Formel 6.).

Zusatz 1. Setzt man jede der Größen b, b′, b″..., gleich 1, so findet man

$$(18)\qquad \frac{a+a'+a''\ldots}{n}=M(a,a',a''\ldots).$$

Der erste Theil der vorstehenden Formel ist das sogenannte arithmetische Mittel zwischen den Größen a, a′, a″...

Zusatz 2. Das Mittel zwischen mehreren gleichen Größen ist jeder derselben gleich, sind also die Größen $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''},\ldots$ einander gleich, so ist auch:

$$(19)\qquad \frac{a+a'+a''\ldots}{b+b'+b''\ldots}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\text{etc.}\ldots;$$

was sich auch sehr leicht direct beweisen läßt.

Zusatz 3. Sind $\alpha, \alpha', \alpha''\ldots$ neue Größen von einerlei Zeichen, so ist nach (17)

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha a+\alpha' a'+\alpha'' a''\ldots}{\alpha b+\alpha' b'+\alpha'' b''\ldots}=M\left(\dfrac{\alpha a}{\alpha b},\dfrac{\alpha' a'}{\alpha' b'},\dfrac{\alpha'' a''}{\alpha'' b''}\ldots\right)\\ \qquad\qquad =M\left(\dfrac{a}{b},\dfrac{a'}{b'},\dfrac{a''}{b''}\ldots\right). \end{cases}$$

Auf diese Formel gründet sich der dritte Lehrsatz in den Vorerinnerungen.

Lehrsatz 13. Es seien A, A′, A″..., B, B′, B″..., zwei Reihen willkürlich angenommene Zahlen, deren jede n Glieder enthält, so ist

$$(21)\quad \sqrt[B+B'+B''\ldots]{A\,A'\,A''\ldots} = M\left(\sqrt[B]{A}, \sqrt[B']{A'}, \sqrt[B'']{A''}\ldots\right)$$

Beweis. Die natürlichen Logarithmen der Größen

$$\sqrt[B+B'+B''\ldots]{A\,A'\,A''\ldots}, \quad \sqrt[B]{A}, \sqrt[B']{A'}, \sqrt[B'']{A''}, \ldots$$

sind respective

$$\frac{1A+1A'+1A''\ldots}{B+B'+B''\ldots}, \frac{1A}{B}, \frac{1A'}{B'}, \frac{1A''}{B''}, \ldots \qquad (\mathfrak{A})$$

und die Gleichung (17) liefert folgende Relation zwischen diesen Logarithmen:

$$\frac{1A+1A'+1A''\ldots}{B+B'+B''\ldots} = M\left[\frac{1A}{B}, \frac{1A'}{B'}, \frac{1A''}{B''}\ldots\right].$$

Geht man von den Logarithmen auf die Zahlen zurück, was nach Lehrs. 10. erlaubt ist, so kommt man auf die Formel (21).

Zusatz 1. Ist jede der Zahlen B, B′, B″... der Einheit gleich, so hat man

$$(22)\quad \sqrt[n]{A, A', A''\ldots} = M\,(A, A', A''\ldots).$$

Der erste Theil der vorstehenden Formel ist das sogenannte geometrische Mittel zwischen den Zahlen A, A′, A″...

Zusatz 2. Sind die Wurzeln

$$\sqrt[B]{A}, \quad \sqrt[B']{A'}, \quad \sqrt[B'']{A''}, \ldots.$$

einander gleich, so ist auch das Mittel einer jeden derselben gleich, und es ist alsdann

$$(23)\quad \sqrt[B+B'+B''\ldots]{A\,A'\,A''\ldots} = \sqrt[B]{A} = \sqrt[B']{A'} = \sqrt[B'']{A''} = \text{etc.}\ldots;$$

was sich auch sehr leicht direct beweisen läßt.

Der Zahlenwerth eines Mittels zwischen mehreren gegebenen Größen ist nicht immer ein Mittel zwischen ihren Zahlenwerthen. Obgleich z. B. — 1 ein Mittel zwischen — 2 und + 3 ist, so ist doch 1 nicht ein Mittel zwischen 2 und 3.

Eine der einfachsten Arten, ein Mittel zwischen den Zahlenwerthen von n Größen

$$a, a' a'', \ldots$$

zu erhalten, besteht darin, daß man zuvörderst das arithmetische Mittel zwischen den Quadraten

$$a^2, a'^2 a''^2 \ldots.$$

sucht, und sodann aus dem Resultate die Quadratwurzel auszieht. Verfährt man also, so findet man zuerst

$$\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots}{n} = M(a^2, a'^2, a''^2 \ldots),$$

und dann, mit Bezugnahme auf Lehrs. 9, Zus.:,

$$(24) \qquad \frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}}{\sqrt{n}} = M(\sqrt{a^2}, \sqrt{a'^2}, \sqrt{a''^2} \ldots).$$

Nun sind aber die positiven Werthe von

$$\sqrt{a^2}, \sqrt{a'^2}, \sqrt{a''^2} \ldots.$$

den Zahlenwerthen der gegebenen Größen

$$a, a', a'' \ldots.$$

gleich, folglich erhält man nach (24) ein Mittel zwischen diesen Werthen, wenn man den sehr einfachen Ausdruck

$$\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)}$$

durch $\sqrt{n}$ dividirt.

Der Ausdruck $\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)}$, welcher den größten von allen Zahlenwerthen, von welchen hier die Rede ist, übersteigt, könnte füglich der Modulus des Systems von Größen genannt werden, welches durch a, a', a'' ... gebildet wird. Der Modulus des Systems, welches die Größen a und b bilden, wäre alsdann nichts anderes, als der Modulus des imaginären Ausdrucks $\alpha + \beta i$ (siehe Cap. 7, §. 2.).

Wie dem auch sei, so sind auf alle Fälle die Ausdrücke von der Form

$$\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)}$$

um ihrer Eigenschaften willen merkwürdig. In der Geometrie führen sie auf die Bestimmung gerader Linien, und auf die des Inhalts ebener Flächen, vermittelst der orthogonalen Projectionen derselben. In der Algebra sind sie der Gegenstand mehrerer wichtigen Lehrsätze, von welchen ich folgende anzuführen mich begnügen will.

Lehrsatz 14. Wenn die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \text{ etc.....}$$

gleich sind, so wird der Zahlenwerth eines jeden derselben durch den Quotienten

$$\frac{\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\ldots)}}{\sqrt{(b^2+b'^2+b''^2\ldots)}}$$

ausgedrückt werden; so daß also

$$(25)\quad \frac{a}{b}, = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \text{etc...} = \pm\frac{\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\ldots)}}{\sqrt{(b^2+b'^2+b''^2\ldots)}}$$

ist, wo das Zeichen + oder das Zeichen — genommen werden muß, je nachdem die vorgelegten Brüche positiv oder negativ sind.

Beweis. In dem angenommenen Falle werden die Brüche

$$\frac{a^2}{b^2}, \frac{a'^2}{b'^2}, \frac{a''^2}{b''^2}, \text{ etc.....}$$

gleich sein, und es ist demnach

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2} = \text{etc....} = \frac{a^2+a'^2+a''^2\ldots}{b^2+b'^2+b''^2\ldots}$$

Zieht man nun die Quadratwurzeln aus, so kommt man auf Formel (25) zurück.

Lehrsatz 15. Wenn die beliebigen Größen a, a', a''..., deren Anzahl n sein mag, nicht alle einander gleich sind, so ist der Zahlenwerth der Summe

$$a+a'+a''\ldots$$

kleiner als das Product

$$\sqrt{n}\,.\,\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\ldots)};$$

so daß also

$$(26)\quad \text{Zahlenw. } (a+a'+a''\ldots) < \sqrt{n}\,.\,\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\ldots)}$$

sein wird.

Beweis. Addirt man zu dem Quadrate der Summe

$$a+a'+a''\ldots$$

die Quadrate der Differenzen zwischen den Größen a, a', a''..., welche man erhält, wenn man diese Größen auf alle möglichen Arten paarweise combinirt, also

$$(a-a')^2, (a-a'')^2, \ldots, (a'-a'')^2, \text{ etc.....},$$

so findet man

$$(27)\quad \begin{cases} (a+a'+a''\ldots)^2+(a-a')^2+(a-a'')^2+\ldots+(a'-a'')^2 \\ +\text{ etc.}\ldots = n\,(a^2+a'^2+a''^2\ldots), \end{cases}$$

und hieraus folgt

$$(a+a'+a''\ldots)^2 < n\,(a^2+a'^2+a''^2\ldots).$$

Zieht man nun aus beiden Theilen dieser Formel die Quadratwurzel aus, so erhält man genau die Formel (26).

Zusatz. Dividirt man beide Theile der Formel (26) durch n, so findet man

$$(28)\quad \text{Zahlenw.}\ \frac{a+a'+a''\ldots}{n} < \frac{\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\ldots)}}{\sqrt{n}}.$$

Der Zahlenwerth des arithmetischen Mittels zwischen mehreren Größen a, a′, a″... ist demnach kleiner als der Quotient

$$\frac{\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\ldots)}}{\sqrt{n}},$$

welcher, wie oben gezeigt worden ist, ein Mittel zwischen den Zahlenwerthen ebendieser Größen ist.

Anmerkung 1. Sind die Größen a, a′, a″... einander gleich, so ist offenbar

$$\text{Zahlenw.}\ (a+a'+a''\ldots) = \sqrt{n}\,.\,\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\ldots)} = n\,a.$$

Anmerkung 2. Setzt man in (27) successive $n=2$, $n=3$, etc...., so erhält man

$$(29)\quad \begin{cases} (a+a')^2+(a-a')^2 = 2(a^2+a'^2), \\ (a+a'+a'')^2+(a-a')^2+(a-a'')^2+(a'-a'')^2 \\ = 3\,(a^2+a'^2+a''^2)\ \text{etc.}\ldots\ldots \end{cases}$$

Lehrsatz 16. Es seien a, a′, a″..., α, α′, α″.... zwei Reihen von Größen, deren Anzahl n sein mag, und wir wollen annehmen, daß die Brüche

$$\frac{a}{\alpha},\ \frac{a'}{\alpha'},\ \frac{a''}{\alpha''},\ \text{etc.}\ldots\ldots$$

nicht alle einander gleich sind, so muß die Summe

$$a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''\ldots.$$

kleiner sein als das Product

$$\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\ldots)}\,.\,\sqrt{(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2\ldots)};$$

also

$$(30)\quad \begin{cases} \text{Zahlenw.}\ (a\alpha+a'\alpha'+a''a''\ldots) \\ < \sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\ldots)}\,.\,\sqrt{(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2\ldots)}. \end{cases}$$

Beweis. Addirt man zu dem Quadrate der Summe

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots .$$

die Zähler der Brüche, welche die Quadrate der Differenzen zwischen den auf alle möglichen Arten paarweise combinirten Quotienten

$$\frac{a}{\alpha}, \frac{a'}{\alpha'}, \frac{a''}{\alpha''}, \ldots .$$

sind, also

$$(a\alpha' - a'\alpha)^2, (a\alpha'' - a''\alpha)^2, \ldots, (a'\alpha'' - a''\alpha')^2, \text{ etc} \ldots$$

so findet man

$$(31)\quad \begin{cases} (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots)^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + \ldots \\ \quad + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 + \text{etc} \ldots \\ = (a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots), \end{cases}$$

und hieraus folgt

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots)^2 < (a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots).$$

Zieht man aus beiden Theilen dieser Formel die Quadratwurzel aus, so erhält man genau die Formel (30).

Zusatz. Dividirt man beide Theile der Formel (30) durch n, so findet man

$$(32)\quad \begin{cases} \text{Zahlenw.} \dfrac{(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots)}{n} \\ < \dfrac{\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)}}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots)}}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Das arithmetische Mittel zwischen den Producten

$$a\alpha, a'\alpha', a''\alpha'', \ldots .$$

hat demnach einen kleineren Zahlenwerth, als das Product der beiden Quotienten, welche Mittel zwischen den Zahlenwerthen der Größen

$$a, a', a'' \ldots .$$

und der Größen

$$\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots .$$

ausdrücken.

Anmerkung 1. Wenn die Brüche

$$\frac{a}{\alpha}, \frac{a'}{\alpha'}, \frac{a''}{\alpha''}, \ldots .$$

einander gleich sind, so erhält man aus (31)

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots)^2 = (a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots),$$

mithin auch

Zahlenw. $(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots)$
$= \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots)}$.

Es wäre leicht, zu diesem Resultate auch direct zu gelangen.

Anmerkung 2. Setzt man in (31) successive $n = 2$, $n = 3$, etc...., so erhält man

$$(33)\quad \begin{cases} (a\alpha + a'\alpha')^2 + (a\alpha' + a'\alpha)^2 = (a^2 + a'^2)(\alpha^2 + \alpha'^2), \\ (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'')^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 \\ + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 = (a^2 + a'^2 + a''^2)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2), \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die erste der vorstehenden Gleichungen stimmt mit der Gleichung (8) in Cap. 7, §. 1. überein. Die zweite gibt auch

$$(34)\quad \begin{cases} (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 \\ = (a^2 + a'^2 + a''^2)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2) - (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'')^2, \end{cases}$$

und diese Gleichung läßt sich bei der Theorie der Krümmungshalbmesser auf beliebigen Oberflächen gezogener Curven und bei mehreren Untersuchungen in der Mechanik mit Vortheil anwenden.

Wir wollen diese Note mit dem Beweise eines wichtigen Lehrsatzes schließen, auf welchen die Vergleichung des geometrischen Mittels zwischen mehreren Zahlen mit ihrem arithmetischen Mittel führt.

Lehrsatz 17. Das geometrische Mittel zwischen mehreren Zahlen A, B, C, D... ist immer kleiner als ihr arithmetisches Mittel.

Beweis. Es sei n die Anzahl der Zahlen A, B, C, D..., so darf man nur beweisen, daß allgemein

$$(35)\qquad \sqrt[n]{ABCD\ldots} < \frac{A + B + C + D\ldots}{n}$$

ist, oder, was dasselbe ist, daß

$$(36)\qquad ABCD\ldots < \left(\frac{A + B + C + D\ldots}{n}\right)^n$$

ist. Nun aber ist offenbar für $n = 2$

$$AB = \left(\frac{A + B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A - B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A + B}{2}\right)^2,$$

und so erhält man, wenn man successive $n = 4$, $n = 8$, etc..., und endlich $n = 2^m$ setzt:

$$ABCD < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{C+D}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4,$$

$$ABCDEFGH < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4 \left(\frac{E+F+G+H}{4}\right)^4$$

$$< \left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8,$$

etc. .....

$$(37)\quad ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+D\ldots}{2^m}\right)^{2^m}.$$

Ist nun aber n kein Glied der geometrischen Progression

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ldots,$$

so sei 2^m ein Glied derselben, welches größer als n ist, und

$$K = \frac{A+B+C+D\ldots}{n}.$$

Kehrt man nun zu der Formel (37) zurück, so erhält man

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < \left[\frac{A+B+C+\ldots+(2^m-n)K}{2^m}\right]^{2^m},$$

oder mit andern Worten

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < K^{2^m}.$$

Es ist demnach

$$ABCD\ldots < K^n = \left(\frac{A+B+C+D\ldots}{n}\right)^n,$$

was zu erweisen war.

Zusatz. Aus (36) folgt

$$(38)\quad A+B+C+D\ldots > n\sqrt[n]{ABCD\ldots},$$

eine Formel, welche für alle Werthe von A, B, C D... gilt. So z. B. ist

$$(39)\quad \begin{cases} A+B > 2\sqrt{AB}, \\ A+B+C > 3\sqrt[3]{ABC} \\ \text{etc.} \ldots\ldots \end{cases}$$

Dritte Note.

Von der Auflösung numerischer Gleichungen.

Eine oder mehrere numerische Gleichungen auflösen, heißt: die Werthe der in denselben vorkommenden Unbekannten in Zahlen finden. Numerisch aber heißt eine Gleichung, wenn die darin vorkommenden Constanten Zahlen sind. Wir wollen uns hier nur mit solchen Gleichungen beschäftigen, welche eine einzige Unbekannte enthalten, und wollen zuvörderst in Beziehung auf diese folgende Sätze aufstellen.

Lehrsatz 1. Es sei $f(x)$ eine reelle Function von x, welche in Beziehung auf x zwischen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$ stetig ist. Haben nun die beiden Größen $f(x_0)$, $f(X)$ entgegengesetzte Zeichen, so kann man der Gleichung

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

durch einen oder durch mehrere zwischen x_0 und X liegende Werthe Genüge leisten.

Beweis. Es sei x_0 die kleinste von den beiden Größen x_0 und X, und

$$X - x_0 = h;$$

ferner sei m irgend eine ganze Zahl, welche aber größer als 1 ist. Da nun eine von den beiden Größen $f(x_0)$, $f(X)$ positiv, die andere dagegen negativ ist, so muß die Reihe

$$f(x_0), f\left(x_0 + \frac{h}{m}\right), f\left(x_0 + \frac{2h}{m}\right), \ldots, f\left(X - \frac{h}{m}\right), f(X)$$

von der Art sein, daß man, bei einer successiven Vergleichung des ersten Gliedes mit dem zweiten, des zweiten mit dem dritten, des dritten mit dem vierten ꝛc., zuletzt einmal oder öfter

sogar auf zwei auf einander folgende Glieder stößt, welche entgegengesetzte Zeichen haben. Es seien

$$f(x_1),\ f(X')$$

zwei Glieder dieser Art, und x_1 der kleinere von den beiden ihnen correspondirenden Werthen von x; so ist offenbar

$$x_0 < x_1 < X^1 < X \text{ und}$$

$$X^1 - x_1 = \frac{h}{m} = \frac{1}{m}(X - x_0).$$

Zwischen x_1 und X' gibt es nun gewiß zwei andere Werthe x_2, X'', welche für x in $f(x)$ substituirt, zwei Resultate von entgegengesetzten Zeichen ergeben und den Bedingungen

$$x_1 < x_2 < X'' < X', \text{ und}$$

$$X'' - x_2 = \frac{1}{m}(X' - x_1) = \frac{1}{m^2}(X - x_0)$$

entsprechen. Fährt man so fort, so erhält man 1) eine Reihe von zunehmenden Werthen von x

$$(2) \qquad x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \text{etc.}\ldots,$$

2) eine Reihe von abnehmenden Werthen

$$(3) \qquad X,\ X',\ X'',\ \text{etc.}\ldots,$$

welche die ersteren respective um die Producte

$$1 \times (X - x_0),\ \frac{1}{m}(X - x_0),\ \frac{1}{m^2}(X - x_0),\ \text{etc.}\ldots.$$

übersteigen und zuletzt den Werthen in der ersten Reihe beliebig nahe kommen werden. Hieraus folgt, daß die allgemeinen Glieder der Reihen (2) und (3) sich einer gemeinschaftlichen Grenze nähern. Diese Grenze sei a. Da nun die Function $f(x)$ zwischen $x = x_0$ und $x = X$ stetig ist, so werden sich die allgemeinen Glieder der Reihen

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \text{etc}\ldots$$
$$f(X),\ f(X'),\ f(X''),\ \text{etc}\ldots$$

gleichfalls der gemeinschaftlichen Grenze $f(a)$ nähern, und da sie beständig entgegengesetzte Zeichen haben, so muß offenbar diese Grenze $f(a) = 0$ sein. Man wird daher der Gleichung

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

Genüge leisten, wenn man für x den zwischen x_0 und X liegenden Werth a setzt; mit anderen Worten;

$$(4) \qquad x = a$$

wird eine Wurzel der Gleichung (1) sein.

Anmerkung 1. Hat man die Reihen (2) und (3) bis zu den Gliedern

$$x_n \text{ und } X^{(n)}$$

fortgesetzt (wo n eine beliebige ganze Zahl ist), und nimmt man alsdann die halbe Summe dieser beiden Werthe als Näherungswerth von x an, so ist der Fehler, welchen man macht, kleiner als ihre halbe Differenz, d. h. kleiner als

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(X - x_0)}{m^n}.$$

Da dieser letzte Ausdruck beständig abnimmt, wenn x zunimmt, so folgt, daß man nur eine hinlänglich große Anzahl von Gliedern in beiden Reihen berechnen dürfte, um für die Wurzel a beliebig nahe Werthe zu erhalten.

Anmerkung 2. Liegen mehrere reelle Wurzeln der Gleichung (1) zwischen den Grenzen x_0 und X, so gibt die vorstehende Methode sie zum Theil, und öfters sogar alle, zu erkennen. Alsdann wird man für x_1, X', oder für x_2, X'', etc.... mehrere Systeme von Werthen erhalten, welche alle dieselben Eigenthümlichkeiten haben.

Anmerkung 3. Wächst die Function f (x) beständig zwischen $x = x_0$ und $x = X$, so liegt zwischen $x = x_0$ und $x = X$ nur ein einziger Werth von x, welcher der Gleichung (1) Genüge leistet.

Zusatz 1. Hat die Gleichung (1) keine reellen Wurzeln, welche zwischen den Grenzen x_0 und X liegen, so müssen die Größen

$$f(x_0) \text{ und } f(X)$$

einerlei Zeichen haben.

Zusatz 2. Setzt man in Lehrs. 1.

$$f(x) - b$$

für f (x) (wo b eine Constante bedeutet), so erhält man genau den vierten Lehrsatz in Cap. 2., §. 2. Wendet man auch in diesem Falle die oben angezeigte Methode an, so findet man die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = b, \quad (5)$$

welche zwischen x_0 und X liegen.

Anmerkung. Hat die Gleichung (1) mehrere zwischen x_0 und X liegende Wurzeln, so kann man nicht immer darauf rechnen, durch Berechnung der Reihen (2) und (3) die kleinste oder die größte dieser Wurzeln zu erhalten; aber man kann zu diesem Zwecke gelangen, wenn man sich einer Methode bedient, von welcher Legendre in seinem Supplément à la

Théorie des nombres Gebrauch gemacht hat. Diese zweite Methode läßt sich unmittelbar aus folgenden beiden Lehrsätzen ableiten.

Lehrsatz 2. Gesetzt, die Function $f(x)$ sei zwischen $x = x_0$ und $x = X$ stetig; auch sei $X > x$, und es seien $\varphi(x)$, $\chi(x)$ zwei Hülfsfunctionen, welche gleichfalls zwischen $x = x_0$ und $x = X$ stetig bleiben, aber außerdem 1) zwischen diesen Grenzen beständig mit x zugleich zunehmen und 2) von der Art sind, daß die Differenz

$$\varphi(x) - \chi(x)$$

für $x = x_0$ negativ und, abgesehen vom Zeichen, beständig gleich $f(x)$ ist. Wenn nun die Gleichung

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

mehrere zwischen x_0 und X liegende reelle Wurzeln hat, so bilden die, vermittelst der Formeln

$$(6) \quad \varphi(x_1) = \chi(x_0),\ \varphi(x_2) = \chi(x_1),\ \varphi(x_3) = \chi(x_2),\ \text{etc...}$$

aus einander hergeleiteten, Werthe

$$(7) \qquad x_0, x_1, x_2, x_3, \text{etc....}$$

eine Reihe von zunehmenden Größen, deren allgemeines Glied sich der kleinsten Wurzel der Gleichung (1) nähert. Liegt dagegen keine Wurzel der Gleichung (1) zwischen x_0 und X, so wird das allgemeine Glied der Reihe (7) zuletzt größer als X.

Beweis. Wir wollen zuvörderst annehmen, daß eine oder mehrere Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen x_0 und X liegen, und wollen die kleinste unter diesen Wurzeln durch a bezeichnen, so wird man der Gleichung $f(x) = 0$, oder, was dasselbe ist, der Gleichung

$$(1) \qquad \varphi(x) - \chi(x) = 0$$

Genüge leisten, wenn man $x = a$ setzt, und es ist demnach

$$(8) \qquad \varphi(a) = \chi(a).$$

Da ferner $\chi(x)$ von $x = x_0$ bis $x = X$ beständig mit x zugleich wächst, und da $a > x_0$ ist, so ist auch

$$\chi(a) > \chi(x_0).$$

Verbindet man die beiden letzten Formeln mit der ersten von den Gleichungen (6), also mit

$$\chi(x_0) = \varphi(x_1),$$

so erhält man

$$\varphi(a) > \varphi(x_1),$$

mithin

$$(9) \qquad a > x_1.$$

Verbindet man ebenso die drei Formeln

$$\varphi(a) = \chi(a),\ \chi(a) > \chi(x_1),\ \chi(x_1) = \varphi(x_2),$$

von denen die zweite sich unmittelbar aus Formel (9) ergibt, so findet man:

$$\varphi(a) > \varphi(x_2)$$

mithin

$$a > x_2. \tag{10}$$

Fährt man so fort, so wird man sich überzeugen, daß alle Glieder der Reihe (6) kleiner als die Wurzel a sind. Ich behaupte aber auch, daß die Glieder dieser Reihe immer größer und größer werden. Da nämlich die Differenz

$$\varphi(x) - \chi(x)$$

für $x = x_0$ negativ ist, so ist auch

$$\varphi(x_0) < \chi(x_0).$$

Nun ist aber

$$\chi(x_0) = \varphi(x_1);\ \text{also auch}$$
$$\varphi(x_0) < \varphi(x_1),\ \text{oder}$$
$$x < x_1. \tag{11}$$

Da ferner x_1 zwischen x_0 und a liegt, so kann keine reelle Wurzel der Gleichung $\varphi(x) - \chi(x) = 0$ zwischen x_0 und x_1 liegen; mithin müssen (nach Lehrs. 1, Zus. 1.) die Größen $\varphi(x_0) - \chi(x_0)$, $\varphi(x_1) - \chi(x_1)$ einerlei Zeichen haben, d. h. sie müssen beide negativ sein. Es ist demnach

$$\varphi(x_1) < \chi(x_1),$$

mithin auch (da $\chi(x_1) = \varphi(x_2)$ ist),

$$\varphi(x_1) < \varphi(x_2),$$
$$x_1 < x_2. \tag{12}$$

etc. . . . . .

Die Größen

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \text{etc.} \ldots .$$

bilden demnach eine Reihe, deren allgemeines Glied x_n zugleich mit n beständig zunimmt, ohne jedoch größer als a werden zu können. Es wird sich nothwendigerweise also einer Grenze nähern, welche gleich a oder kleiner als a ist, und diese Grenze sei 1. Da nach (6)

$$\varphi(x_{n+1}) = \chi(x_n)$$

ist, so wird für $n = \infty$

$$\varphi(1) = \chi(1) \tag{13}$$

sein. Die Größe 1 wird also selbst eine Wurzel der Gleichung (1) sein, und da diese Größe größer als x_0 ist, ohne jedoch größer als a zu sein, so ist offenbar

$$1 = a. \tag{14}$$

Gesetzt, die Gleichung (1) habe keine zwischen x_0 und X liegende Wurzel, so wird das allgemeine Glied x_n der Reihe (7) beständig wachsen, wenn dies bei n der Fall ist, wenigstens so lange dieses Glied kleiner als X ist; denn die Differenz

$$\varphi(x_n) - \chi(x_n)$$

wird alsdann (nach Lehrs. 1, Zus. 1.) mit

$$\varphi(x_0) - \chi(x_0)$$

einerlei Zeichen haben, d. h. sie wird negativ sein, und man wird daher, so wie oben, die Formeln (11), (12), etc.... erhalten. Ferner kann x_n sich keiner Grenze 1 nähern, welche kleiner als X ist, da die Existenz einer solchen Grenze auf die Gleichung (13), also auf eine zwischen x_0 und X liegende Wurzel führen müßte. Es muß demnach nothwendigerweise in dem angenommenen Falle der Werth von x_n zuletzt größer als X werden.

Zusatz 1. Die Bedingungen, welchen die Hülfsfunctionen $\varphi(x)$, $\chi(x)$ im zweiten Lehrsatze unterworfen sind, können auf unendlich viele Arten erfüllt werden. Aber unter allen den Werthen, welche die Function $\varphi(x)$ erhalten kann, empfehlen sich diejenigen besonders, welche die Auflösung der Gleichungen (6), d. h. jeder Gleichung von der Form

$$\varphi(x) = \text{Constante},$$

erleichtern. Ist der Werth von $\varphi(x)$ auf diese Weise gewählt, so wird man ohne Mühe die Glieder der Reihe (7) berechnen können, und man darf alsdann nur noch die Grenze suchen, welcher sich dieselben nähern, um die kleinste unter den zwischen x_0 und X liegenden Wurzeln der Gleichung (1) zu finden. Werden die Glieder der erwähnten Reihe zuletzt größer als X, so hat die Gleichung (1) keine zwischen x_0 und X liegende Wurzel.

Zusatz 2. Setzt man

$$x_0 = 0,$$

und hat die Gleichung (1) nur positive Wurzeln, so sind die Größen x_1, x_2, etc.... sämmtlich kleiner, als die kleinste Wurzel, und liefern Werthe, welche dieser Wurzel immer näher und näher kommen.

Lehrsatz 3. Gesetzt, die Function $f(x)$ sei zwischen $x = x_0$ und $x = X$ stetig; ferner sei $X > x$, und endlich seien $\varphi(x)$, $\chi(x)$ zwei Hülfsfunctionen, welche gleichfalls zwischen $x = x_0$ und $x = X$ stetig bleiben, aber außerdem 1) zwischen diesen

Grenzen mit x zugleich wachsen und 2) von der Art sind, daß die Differenz

$$\varphi(x) - \chi(x)$$

für $x = X$ positiv wird und, abgesehen vom Zeichen, beständig gleich $f(x)$ ist. Hat nun die Gleichung

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

eine oder mehrere zwischen x_0 und X liegende Wurzeln, so werden die vermittelst der Formeln

(15) $\varphi(X') = \chi(X)$, $\varphi(X'') = \chi(X')$, $\varphi(X''') = \chi(X'')$, etc....

aus einander abgeleiteten Werthe von X,

$$(16) \qquad X, X', X'', X''', \text{etc.}....$$

eine Reihe von abnehmenden Größen bilden, deren allgemeines Glied sich der größten unter allen Wurzeln der Gleichung (1) nähern wird. Hat dagegen diese Gleichung keine zwischen x_0 und X liegende reelle Wurzel, so wird das allgemeine Glied der Reihe (16) zuletzt kleiner als x_0 werden.

Der Beweis dieses Lehrsatzes ist dem des vorigen so überaus ähnlich, daß wir der Kürze wegen uns der Mühe überheben, ihn zu führen.

Zusatz 1. Unter den unendlich vielen Werthen, welche $\varphi(x)$ haben kann, wenn sie den angegebenen Bedingungen entsprechen sollen, empfehlen sich diejenigen besonders, welche die Auflösung der Gleichungen (15), d. h. jeder Gleichung von der Form

$$\varphi(x) = \text{Constante}, \text{ erleichtern.}$$

Ist der Werth von $\varphi(x)$ auf diese Weise bestimmt, so wird man ohne Mühe die Glieder der Reihe (16) berechnen können, und man hat alsdann nur noch die Grenze zu suchen, der sich dieselben nähern, um die größte unter den zwischen x_0 und X liegenden Wurzeln der Gleichung (1) zu finden. Wenn jene Glieder zuletzt kleiner als x_0 werden, so hat die Gleichung (1) keine zwischen x_0 und X liegende reelle Wurzel.

Zusatz 2. Hat die Gleichung (1) positive Wurzeln, und ist X größer als die größte unter diesen Wurzeln, so sind die Größen X, X', etc.... sämmtlich größer als diese Wurzel, liefern aber Werthe, welche dieser Wurzel immer näher und näher kommen.

Anmerkung 1. Hat die Gleichung (1) nur eine reelle Wurzel a, welche zwischen x_0 und X liegt, so werden die allgemeinen Glieder der Reihen (7) und (16), von denen die

erste zunehmende, die zweite hingegen abnehmende Glieder hat, sich einer gemeinschaftlichen Grenze nähern, welche dieser Wurzel gleich ist. Setzt man diese Reihen bis zu den Gliedern

$$x_n \text{ und } X^{(n)}$$

fort, und nimmt man die halbe Summe dieser beiden Glieder als Näherungswerth für die Wurzel a an, so ist der hierbei begangene Fehler kleiner als

$$\frac{X^{(n)} - x_n}{2}.$$

Anmerkung 2. Um die eben aufgestellten Principien auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir die Gleichung

(17) $x^m - A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} - \ldots - A_{m-1} x - A_m = 0$

betrachten, wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m$$

dagegen positive Größen oder Nullen. — Da der erste Theil der Gleichung für $x = 0$ negativ, für sehr große Werthe von x hingegen positiv wird, so muß sie wenigstens eine positive Wurzel haben, deren Werth endlich ist. Da diese Gleichung ferner nicht von der Gleichung

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{A_m}{x^m} = 1$$

verschieden ist, deren zweiter Theil unverändert bleibt, während der erstere für beständig zunehmende positive Werthe von x beständig abnimmt, so hat sie offenbar nur eine reelle und positive Wurzel. Es sei a diese Wurzel, und A die größte unter den Zahlen

$$A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m,$$

endlich sei

$$M(A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m)$$

ein Mittel zwischen diesen Zahlen; so erhält man aus (17) für $x = a$, mit Bezugnahme auf die Formel (11) in den Vorerinnerungen,

$$a^m = A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \ldots + A_{m-1} a + A_m$$
$$= (a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} + \ldots + a + 1) . M(A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m)$$
$$= \frac{a^m - 1}{a - 1} . M(A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m) < A . \frac{(a^m - 1)}{a - 1};$$

mithin

$$a - 1 < A . \frac{(a^m - 1)}{a^m} < A,$$

(18) $$a < A + 1.$$

Die positive Wurzel der Gleichung (17) liegt demnach zwischen 0 und $A + 1$. Bezeichnet man ferner durch

$$A_r\, a^{m-r} \text{ und } A_s\, a^{m-s}$$

das kleinste und das größte Glied in dem Polynom

$$A_1\, a^{m-1} + A_2\, a^{m-2} + \ldots + A_{m-1}\, a + A_m,$$

und durch $n =$ oder $< m$ die Anzahl der von Null verschiedenen Glieder, so ist offenbar

$$a^m > n\, A_r\, a^{m-r},$$
$$a^m > n\, A_s\, a^{m-s};$$

mithin

$$a > (n\, A_r)^{\frac{1}{r}},$$
$$a < (n\, A_s)^{\frac{1}{s}},$$

und es ist klar, daß die Wurzeln a zwischen dem größten und dem kleinsten der Glieder

(19) $$n\, A_1,\ (n\, A_2)^{\frac{1}{2}},\ (n\, A_3)^{\frac{1}{3}},\ \ldots,\ (n A_m)^{\frac{1}{m}}$$

liegen muß. Da endlich nach Lehrs. 1, Zus. 1., der erste Theil von (17) von $x = 0$ bis $x = a$ negativ, und von $x = a$ bis $x = \infty$ positiv ist, so kann man auch die größte ganze Zahl, für welche der Ausdruck

(20) $$x^m - A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} - \ldots - A_{m-1} x - A_m$$

negativ wird, als untere, und die kleinste ganze Zahl, für welche (20) positiv wird, als obere Grenze der Wurzel a annehmen. Es seien

$$x_0,\ X$$

die beiden nach einer von den gegebenen Regeln berechneten Grenzen. Setzt man nun etwa

(21) $$\begin{cases} \varphi(x) = x^m, \ \chi(x) = A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots \\ \ldots + A_{m-1} x + A_m \end{cases}$$

so lassen sich die Lehrsätze 2 und 3 auf die Gleichung (17) anwenden, und da in diesem Falle jede von den Gleichungen (6) und (15) sich auf die Form

$$x^m = \text{Constante}$$

reducirt, so ist es leicht, die Größen, welche die Reihen

$$X,\ X',\ X'',\ X''',\ \text{etc.}\ldots,$$
$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \text{etc.}\ldots,$$

bilden, deren allgemeine Glieder sich der Wurzel a immer mehr und mehr nähern, zu berechnen.

Anmerkung 3. Wir wollen ferner die Gleichung

(22) $x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x - A_m = 0$

betrachten, wo m wieder eine ganze Zahl ist, während

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{m-1}, A_m$$

Null oder positive Größen sind, unter welchen die größte A sein mag. Nimmt man $\frac{1}{x}$ als Unbekannte an, so läßt sich die vorgelegte Gleichung unter die Form

$$(23)\begin{cases} \left(\frac{1}{x}\right)^m - \frac{A_{m-1}}{A_m}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1} - \frac{A_{m-2}}{A_m}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-2} - \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{A_1}{A_m}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{A_m} = 0 \end{cases}$$

bringen; ist alsdann der Gleichung (17) ähnlich, und (22) wird ebenfalls nur eine positive Wurzel haben, welche kleiner als

$$(24) \qquad \frac{1}{\frac{A}{A_m} + 1}$$

sein muß, und welche nicht nur zwischen der kleinsten und größten unter den Größen

$$(25)\begin{cases} \frac{A_m}{n A_{m-1}}, \left(\frac{A_m}{n A_{m-2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{A_m}{n A_{m-3}}\right)^{\frac{1}{3}}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \left(\frac{A_m}{n A_1}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \left(\frac{A_m}{n}\right)^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

liegen muß (wo $n =$ oder $< m$ die Anzahl der von Null verschiedenen Glieder im ersten Theile der Gleichung (22) ist), sondern auch zwischen der größten ganzen Zahl, für welche

(26) $x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x - A_m$

negativ wird, und der kleinsten, für welche (26) positiv wird. Hat man erst zwei Grenzen, zwischen welchen die gesuchte Wurzel liegt, so darf man nur die Lehrsätze 2. und 3. auf die Gleichung (23) anwenden, in welcher aber $\frac{1}{x}$ als die zu findende Unbekannte angesehen werden muß.

Anmerkung 4. Liegen zwei sehr wenig von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung (1) zwischen x_0 und X, so scheinen die Glieder der Reihen (7) und (16) anfangs sich einer und derselben Grenze zu nähern, und man könnte beide

Reihen ziemlich weit fortsetzen, ehe man bemerkte, daß die Grenzen, welchen sie sich wirklich nähern, von einander verschieden sind. Dieselbe Bemerkung läßt sich auch in Beziehung auf die Reihen (2) und (3) machen. Man kann mithin vermittelst der Auflösungsmethoden, welche sich allein auf den ersten Lehrsatz, oder auf die Lehrsätze (2) und (3) gründen, nicht in allen Fällen die Anzahl der reellen Wurzeln einer numerischen Gleichung finden; aber man erhält durch dieselben denn doch immer einen beliebig nahen Werth für jede reelle Wurzel, welche allein zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt. — Hat die vorgelegte numerische Gleichung zum ersten Theile eine reelle und ganze Function von x, so läßt sich, wie Lagrange gezeigt hat, immer die Anzahl der reellen Wurzeln bestimmen; so wie auch deren Werthe in diesem Falle näherungsweise gefunden werden können. Um diesen Zweck leichter zu erreichen, wird man die vorgelegte Gleichung zuvörderst auf eine andere reduciren, welche nur ungleiche Wurzeln hat; wobei man auf folgende Weise verfährt.

Es sei

$$F(x = 0 \tag{27}$$

die vorgelegte Gleichung; ihre verschiedenen reellen oder imaginären Wurzeln seien a, b, c,..., und m der Grad, von welchem ihr erster Theil ist; auch nehmen wir an, daß der Coefficient der höchsten Potenz von x auf 1 reducirt sei. Endlich sei m' die Anzahl der Wurzeln, welche gleich a sind, m'' die der Wurzeln, welche gleich b sind, m''' die der Wurzeln, welche gleich c sind, etc...., so ist

$$m' + m'' + m''' + \ldots = m, \tag{28}$$

$$F(x) = (x-a)^{m'} \cdot (x-b)^{m''} \cdot (x-c)^{m'''} \ldots. \tag{29}$$

Hieraus folgt, daß, wenn z eine neue Unbekannte ist,

$$\frac{F(x+z)}{F(x)} = \left(1+\frac{z}{x-a}\right)^{m'} \cdot \left(1+\frac{z}{x-b}\right)^{m''} \cdot \left(1+\frac{z}{x-c}\right)^{m'''} \ldots \tag{30}$$

ist. Setzt man nun

$$F(x+z) = F(x) + zF_1(x) + z^2 F_2(x) + \text{etc}.... \tag{31}$$

und entwickelt man die Ausdrücke

$$\left(1+\frac{z}{x-a}\right)^{m'}, \left(1+\frac{z}{x-b}\right)^{m''}, \left(1+\frac{z}{x-c}\right)^{m'''}, \text{etc}....$$

nach den aufsteigenden Potenzen von z, so verwandelt sich die Gleichung (30) in

$$1+z\frac{F_1(x)}{F(x)}+z^2\frac{F_2(x)}{F(x)}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\left(1+\frac{m'}{x-a}z+\ldots\right)\left(1+\frac{m''}{x-b}z+\ldots\right)\left(1+\frac{m'''}{x-c}z+\ldots\right)\text{etc.}\ldots$$

$$=1+\left(\frac{m'}{x-a}+\frac{m''}{x-b}+\frac{m'''}{x-c}+\ldots\right)z+\text{etc.}\ldots\ldots$$

Setzt man nun die Coefficienten von z auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich, so erhält man

$$(32)\begin{cases}\dfrac{F_1(x)}{F(x)}=\dfrac{m'}{x-a}+\dfrac{m''}{x-b}+\dfrac{m'''}{x-c}+\text{etc.}\ldots\ldots\\ =\dfrac{m'(x-b)(x-c)\ldots+m''(x-a)(x-c)\ldots+m'''(x-a)(x-b)\ldots+\text{etc.}\ldots}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots}\end{cases}$$

Da der zweite Theil dieser Formel offenbar ein irreductibeler algebraischer Bruch ist, so folgt, daß man nur den ersten Theil F (x) der Gleichung (27) durch den größten gemeinschaftlichen Theiler der Polynomien F (x) und F_1 (x) dividiren darf, um jene Gleichung auf folgende

$$(33)\qquad (x-a)(x-b)(x-c)\ldots,$$

welche nur ungleiche Wurzeln hat, zu reduciren.

Wir halten uns nicht länger dabei auf, zu zeigen, wie man vermittelst derselben Principien aus der vorgelegten Gleichung verschiedene andere ableiten kann, deren Wurzeln zweimal, dreimal so groß ꝛc., als die der vorgelegten sind. Wir wollen nur noch einige Betrachtungen, in Beziehung auf den Fall, wo unmittelbar vorausgesetzt wird, daß die Wurzeln von (27) ungleich sind, zu dem Gesagten hinzufügen. Da die Zahlen m′, m″, m‴, etc.... sich alsdann auf die Einheit reduciren, so erhält man aus (32)

$$(34)\begin{cases}F_1(x)=\\ (x-b)(x-c)\ldots+(x-a)(x-c)\ldots+(x-a)(x-b)\ldots+\text{etc.},\end{cases}$$

mithin

$$(35)\begin{cases}F_1(a)=(a-b)(a-c)\ldots,\\ F_1(b)=(b-a)(b-c)\ldots,\\ F_1(c)=(c-a)(c-b)\ldots,\\ \text{etc.}\ldots\ldots\end{cases}$$

$$(36)\quad \begin{cases} F_1(a).F_1(b).F_1(c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}.(a-b)^2(a-c)^2\ldots(b-c)^2\ldots \end{cases}$$

Folglich ist in dem angenommenen Falle das Product der Quadrate der Differenzen zwischen den Wurzeln der Gleichung (27), abgesehen vom Zeichen, dem Producte

$$F_1(a).F_1(b).F_1(c)\ldots$$

gleich, also auch dem letzten Gliede der Gleichung in z, welche man bei der Elimination von x aus den Gleichungen

$$(37)\qquad F(x) = 0,\quad z - F_1(x) = 0$$

als Endgleichung erhält, so daß also, wenn H der Zahlenwerth dieses Gliedes ist,

$$(38)\qquad (a-b)^2(a-c)^2\ldots(b-c)^2\ldots = \pm H$$

sein wird. Ist nun a eine reelle Wurzel der Gleichung (27), so werden die beiden Größen

$$F(a+\alpha) = \alpha F_1(a) + \alpha^2 F_2(a) + \text{etc.}\ldots$$
$$F(a-\alpha) = -\alpha F_1(a) + \alpha^2 F_2(a) + \text{etc.}\ldots$$

entgegengesetzte Zeichen haben, wenn α eine sehr kleine Zahl ist; denn die Größen $F_1(a)$, $F_1(b)$, welche durch die Formeln (35) gegeben sind, können niemals sich auf Null reduciren. Sind ferner x_0 und X zwei Grenzen, zwischen welchen nur die Wurzel a liegt, so hat (nach Lehrs. 1, Zus. 1.) $F(X)$ einerlei Zeichen mit $F(a+\alpha)$; $F(x_0)$ einerlei Zeichen mit $F(a-\alpha)$, und die beiden Größen

$$F(x_0),\quad F(x)$$

haben demnach entgegengesetzte Zeichen.

Hat die Gleichung (27) keine gleichen Wurzeln, oder ist sie von denjenigen, welche sie ursprünglich hatte, befreit worden, so ist es leicht, nicht allein für diese Gleichung zwei Grenzen zu finden, zwischen welchen alle ihre reellen Wurzeln liegen müssen, sondern auch eine Reihe von Größen, welche paarweise als Grenzen der verschiedenen Wurzeln angesehen werden können; worauf man sich den Wurzeln selbst beliebig nähern kann. Wir wollen dies durch die Auflösung folgender drei Aufgaben näher darthun.

Aufgabe 1. Zwei Grenzen zu finden, zwischen welchen sämmtliche reelle Wurzeln der Gleichung

$$(27)\qquad F(x) = 0$$

liegen müssen.

Auflösung. Da $F(x)$, der Annahme gemäß, ein Po-

lynom vom m^{ten} Grade in Beziehung auf x ist, in welchem der Coefficient der höchsten Potenz von x, 1 ist, so hat man offenbar, wenn die Coefficienten der auf einander folgenden niedrigeren Potenzen durch

$$a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m,$$

und die Zahlenwerthe dieser Coefficienten durch

$$A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m$$

bezeichnet werden,

$$(39)\quad \begin{cases} F(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m \\ \quad = x^m \pm A_1 x^{m-1} \pm A_2 x^{m-2} \pm \ldots \pm A_{m-1} x \pm A_m. \end{cases}$$

Es sei nun k eine ganze Zahl, welche größer ist, als die einzige positive Wurzel der Gleichung (17) in Lehrs. 3, Anmerk. 2, so wird das Polynom (20) positiv sein, wenn $x = k$ oder $> k$. Man wird folglich nur x größer als k nehmen dürfen, so wird die Summe der Zahlenwerthe der Glieder

$$A_1 x^{m-1}, A_2 x^{m-2}, \ldots, A_{m-1} x, A_m,$$

kleiner sein, als der Zahlenwerth von x^m. Hieraus folgt, daß der erste Theil von (27) niemals Null werden kann, wenn x über die Grenzen

$$-k, \quad +k$$

hinausfällt. Alle positiven und negativen Wurzeln von (27) liegen demnach zwischen eben diesen Grenzen.

Anmerkung 1. Da die Zahl k nur der einzigen Bedingung unterworfen ist, daß sie größer sein muß, als die positive Wurzel der Gleichung (17), so kann man sie entweder dem größten unter den Ausdrücken (19), oder der kleinsten ganzen Zahl gleich setzen, für welche das Polynom (20) positiv wird.

Anmerkung 2. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die auf diese Weise gefundene Zahl nicht nur größer ist, als die Zahlenwerthe der reellen Wurzeln der Gleichung (27), sondern auch größer als die Moduli aller imaginären Wurzeln. Denn es sei

$$x = r(\cos. t + i \sin. t)$$

eine von diesen Wurzeln, so ist auch

$$(40)\quad \begin{cases} r^m.\cos.mt \pm A_1 r^{m-1}.\cos.(m-1)t \pm A_2 r^{m-2}.\cos.(m-2)t \pm \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm A_{m-1} r \cos. t \pm A_m = 0, \end{cases}$$

$$(41)\quad \begin{cases} r^m.\sin.mt \pm A_1 r^{m-1}.\sin.(m-1)t \pm A_2 r^{m-2}.\sin.(m-2)t \pm \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm A_{m-1}.r.\sin. t = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit cos. mt, die zweite mit sin. mt, und addirt die Resultate, so erhält man

$$(42)\quad \begin{cases} r^m \pm A\ r^{m-1}.\cos.t \pm A_2\, r^{m-2}.\cos.2t \pm \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \pm A_{m-1}.r\cos.(m-1)t \pm A_m \cos.mt = 0. \end{cases}$$

Nun ist aber klar, daß man bei dieser Gleichung nicht $r > k$ setzen darf, weil sonst der Zahlenwerth von r^m größer als die Summe der Zahlenwerthe von

$$A_1 r^{m-1},\ A_2 r^{m-2},\ \ldots,\ A_{m-1} r,\ A_m$$

sein würde, und um so mehr größer als die Zahlenwerthe, welche diese Glieder erhalten, wenn man dieselben durch Cosinusse multiplicirt.

Anmerkung 3. Vergleicht man die ersten Theile der Gleichungen (27) und (40) mit dem Polynom (26), so kann man leicht darthun, daß, wenn g eine Zahl ist, welche kleiner als die einzige positive Wurzel der Gleichung (22) ist, g nicht nur eine untere Grenze für die Zahlenwerthe aller reellen Wurzeln von (27) sein muß, sondern auch für die Moduli aller imaginären Wurzeln. Dies ist z. B. der Fall, wenn g der kleinste unter den Ausdrücken (25), oder die größte ganze Zahl ist, welche, für x in (26) substituirt, ein negatives Resultat gibt. Ist die Zahl g auf diese Weise bestimmt, so werden alle positiven Wurzeln von (27) zwischen den Grenzen

$$+ g,\ + k,$$

die negativen hingegen zwischen den Grenzen

$$- k,\ - g$$

liegen.

Anmerkung 4. Sucht man nur eine untere oder obere Grenze der positiven Wurzeln, so kann man dieselbe oft nach Lehrs. 17, Zus. in der vorhergehenden Note erhalten. Denn gesetzt, die Glieder des Polynoms F (x) hätten, mit Ausnahme eines einzigen, alle einerlei Zeichen, so läßt sich die Gleichung (27) unter die Form

$$(43)\quad \begin{cases} x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{s-1} x^{m-s+1} + A_{s+1} x^{m-s-1} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = A_s\, x^{m-s} \end{cases}$$

bringen. Es sei nun n die Anzahl der Glieder des ersten Theils von (43), welche sich nicht auf Null reduciren, und

$$B x^{\mu}$$

das geometrische Mittel zwischen diesen Gliedern, B also das

geometrische Mittel zwischen allen Coefficienten, so wird jede reelle und positive Wurzel der vorgelegten Gleichung nach Lehrs. 17, Zus., in der zweiten Anmerkung, nothwendigerweise der Bedingung

$$A_s x^{m-s} > n B x^{\mu}$$

entsprechen, mithin auch den beiden folgenden

$$(44) \qquad x > \left(\frac{nB}{A_s}\right)^{\frac{1}{m-s-\mu}},$$

$$(45) \qquad x < \left(\frac{A_s}{nB}\right)^{\frac{1}{\mu-m+s}};$$

und zwar der ersteren, wenn $m-s > \mu$, und der zweiten, wenn $m-s < \mu$ ist. Es verdient noch bemerkt zu werden, daß, wenn die Zahl s verschwindet, A_s sich auf den Coefficienten von x^m, d. h. auf 1 reducirt.

Anmerkung 5. Man kann auch sehr leicht auf eine andere Art zwei Grenzen für die positiven Wurzeln der Gleichung (27) finden.

Zuvörderst bemerke man, daß jede Gleichung, in deren erstem Theile nur eine einzige Abwechselung des Zeichens stattfindet, d. h. jede Gleichung von der Form

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots - A_n x^{m-n} - A_{n+1} x^{m-n-1} - \text{etc.} = 0,$$

oder von der Form

$$-A_0 x^m - A_1 x^{m-1} - \ldots + A_n x^{m-n} + A_{n+1} x^{m-n-1} + \text{etc.} \ldots = 0,$$

wo $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n, A_{n+1}$ beliebige Zahlen sind, nur eine einzige positive Wurzel haben kann, welche offenbar dem einzigen positiven Werthe von x gleich ist, für welchen der von $x=0$ bis $x=\infty$ unaufhörlich wachsende Bruch

$$\frac{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \text{etc.} \ldots}{A_n + A_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) + A_{n+2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \text{etc.} \ldots}$$

sich auf 1 reducirt. Der erste Theil einer solchen Gleichung wird folglich einerlei Zeichen mit seinen ersten oder mit seinen letzten Gliedern haben, je nachdem der Werth von x größer oder kleiner als die erwähnte Wurzel ist. Ist nun in dem Polynom (39) $-A_s x^s$ das erste negative Glied nach x^m; $+A_u x^u$ das erste positive Glied nach $-A_s x^s$; $-A_v x^v$ das erste negative Glied nach $A_u x^u$; $+A_w x^w$ das erste positive Glied nach $-A_v x^v$, etc...., so daß also die Gleichung (27) sich in

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots - A_s x^{m-s} - A_{s+1} x^{m-s-1} - \ldots$$
$$A_u x^{m-u} + A_{u+1} x^{m-u-1} + \ldots - A_v x^{m-v} - A_{v+1} x^{m-v-1} - \ldots$$
$$+ A_w x^{m-w} + A_{w+1} x^{m-w-1} + \ldots \pm A_m = 0,$$

verwandelt, so folgt aus vorstehenden Betrachtungen, daß jeder positive Werth von x, welcher der Gleichung (27) Genüge leisten soll, 1) kleiner sein muß, als die größte positive Wurzel der Gleichungen

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots - A_s x^{m-s} - A_{s+1} x^{m-s-1} - \ldots = 0,$$
$$A_u x^{m-u} + A_{u+1} x^{m-u-1} + \ldots - A_v x^{m-v} - A_{v+1} x^{m-v-1} - \ldots = 0,$$

etc. . . . . ,

2) größer als die kleinste dieser Wurzeln, wenn A_m mit dem Zeichen — behaftet ist; im entgegengesetzten Falle dagegen größer als die kleinste positive Wurzel der Gleichungen von der Form

$$-A_s x^{m-s} - A_{s+1} x^{m-s-1} - \ldots + A_u v^{m-u} + A_{u+1} x^{m-u-1} + \ldots = 0,$$
$$-A_v x^{m-v} - A_{v+1} x^{m-v-1} - \ldots + A_w x^{m-w} + A_{w+1} x^{m-w-1} + \ldots = 0$$

etc. . . . .

Zuweilen schließen die beiden so eben angegebenen Bedingungen einander gegenseitig aus, und alsdann hat die Gleichung (27) gar keine positive Wurzel.

Aufgabe 2. Die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung (27) nebst einer Reihe von Größen zu finden, welche, paarweise genommen, als Grenzen dieser Wurzeln angesehen werden können.

Auflösung. Wir wollen annehmen, die Gleichung (27) sei so weit reducirt, daß sie keine gleichen Wurzeln mehr hat. Ist nun k eine obere Grenze für die Zahlenwerthe aller reellen Wurzeln, h hingegen kleiner als die kleinste Differenz zwischen diesen Wurzeln, endlich $k_1, k_2, \ldots, k_n$ andere, und zwar so gewählte Zahlen, daß in der Reihe

$$(46) \quad -k, -k_1, -k_2, \ldots, -k_n, 0, k_n, \ldots, k_2, k_1, k$$

die Differenz zwischen jedem Gliede und dem vorhergehenden immer eine positive Größe ist, welche gleich oder größer als h ist, so ist es klar, daß zwischen zweien auf einander folgenden Gliedern der Reihe (46) nie mehr als eine reelle Wurzel liegen kann. Nun aber erhält man Resultate mit entgegengesetzten Zeichen, wenn man in F (x) für x zwei Größen substituirt, zwischen welchen eine einzige reelle Wurzel liegt; das Zeichen bleibt dagegen dasselbe, wenn keine Wurzel zwischen jene beiden Größen fällt. Betrachtet man daher die Glieder der

Reihe (46) als successive Näherungswerthe von x, und berechnet man die Reihe der diesen Gliedern correspondirenden Werthe für das Polynom F(x), so enthält diese Reihe genau so viele Abwechselungen der Zeichen, al sdie Gleichung (27) reelle Wurzeln hat, und jede dieser Wurzeln liegt zwischen zweien, auf einander folgenden Werthen von x, welche, in F(x) substituirt, Resultate mit entgegengesetzten Zeichen geben. Die einzige Schwierigkeit bei dieser Rechnung besteht also darin: einen passenden Werth für x zu finden. Diesen erhält man aber auf folgende Weise.

Es sei H der Zahlenwerth des letzten Gliedes der Gleichung in z, welche das Resultat der Elimination von x aus den Formeln (37) ist. Die Zahl H wird, wie schon bemerkt worden ist (abgesehen vom Zeichen), dem Producte der Quadrate der Differenzen zwischen den Wurzeln der Gleichung (27) gleich sein. Folglich ist $H^{\frac{1}{2}}$ dem Producte der Moduli ihrer Differenzen gleich (der Modulus jeder reellen Differenz ist aber nichts anderes, als deren Zahlenwerth). Es seien nun a, b zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (27). Sind diese beiden Wurzeln reell, so ist der Zahlenwerth einer jeden von beiden kleiner als k, mithin kann der Zahlenwerth ihrer Differenz, d. h. die Differenz oder die Summe ihrer Zahlenwerthe, niemals größer als 2k sein. Sind die beiden Wurzeln hingegen, oder auch nur eine von ihnen imaginär, so kann man, wenn r_1, r_2 ihre Moduli, und t_1, t_2 zwei reelle Bogen bedeuten,

$$a = r_1 (\cos. t_1 + i \sin. t_1)$$
$$b = r_2 (\cos. t_2 + i \sin. t_2)$$

setzen und erhält alsdann

$$a - b = r_1 \cos. t_1 - r_2 \cos. t_2 + (r_1 \sin. t_1 - r_2 \sin. t_2) . i,$$

$$\text{mod.}(a-b) = [(r_1 \cos. t_1 - r_2 \cos. t_2)^2 + (r_1 \sin. t_1 - r_2 \sin. t_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [r_1^2 - 2 r_1 r_2 \cos.(t_1 - t_2) + r_2^2]^{\frac{1}{2}} < (r_1^2 + 2 r_1 r_2 + r_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Es ist demnach

$$\text{mod.}\ (a - b) < r_1 + r_2;$$

mithin

$$(47). \qquad \text{mod.}\ (a - b) < 2k,$$

vorausgesetzt, daß man die Zahl k so gewählt hat, wie in der ersten Aufgabe, d. h. so, daß sie nicht nur größer ist als die Zahlenwerthe aller reellen Wurzeln, sondern auch größer als die

Moduli aller imaginären Wurzeln. Eben so läßt sich beweisen, daß die Moduli der Differenzen

$$a-c, \ldots, b-c \text{ etc.} \ldots$$

kleiner als $2k$ sind, und hieraus folgt, daß, wenn man einen von diesen Modulis (deren Anzahl $\frac{m(m-1)}{2}$ ist), z. B. den Modulus von $a-b$, weglaßt, das Product aller übrigen kleiner als

$$(2k)^{\frac{m(m-1}{2}-1}$$

sein muß. Multiplicirt man daher diesen Ausdruck mit dem Modulus der Differenz $a-b$, so ist das Resultat größer als das Product der Moduli aller Differenzen, d. h. größer als $H^{\frac{1}{2}}$; mit andern Worten: es ist

$$(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1} \times \text{mod.}(a-b) > H^{\frac{1}{2}},$$

oder, was dasselbe ist,

$$(48) \qquad \text{mod.}(a-b) > \frac{H^{\frac{1}{2}}}{(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1}}.$$

Sind die Wurzeln a und b reell, so reducirt der Modulus der Differenz $a-b$ auf deren Zahlenwerth. Man erhält daher eine Zahl h, welche kleiner als die kleinste Differenz zwischen den reellen Wurzeln der Gleichung (27) ist, wenn man

$$(49) \qquad h = \frac{H^{\frac{1}{2}}}{(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1}}$$

setzt.

Anmerkung 1. Es läßt sich leicht darthun, daß, wenn $A_1, A_2, \ldots A_m$ (in der ersten Aufgabe) ganze Zahlen sind, H gleichfalls eine ganze Zahl sein muß. In diesem Falle wird dei Zahl H, welche nicht verschwinden kann, so lange die Wurzeln der Gleichung (27) ungleich sind, gleich oder größer als die Einheit sein. Die Formel (48) gibt daher

$$(50) \qquad \text{mod.}(a-b) > \frac{1}{(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1}},$$

und man wird daher eine Zahl h erhalten, welche kleiner als die kleinste Differenz zwischen den Wurzeln ist, wenn man

$$(51) \qquad h = \frac{1}{(2k)^{\frac{m(m-1)}{2}-1}}$$

setzt.

Anmerkung 2. Es sei

$$(52) \qquad Z = 0$$

die Gleichung in z, welche man durch die Elimination von x aus den Formeln (37) erhält. Bestimmt man nun, nach der in Aufgabe 1, Anm. 3. angegebenen Methode, eine Grenze G, welche kleiner ist als die Moduli aller reellen und imaginären Wurzeln der Gleichung (52), so ist, wenn a, b, c... die Wurzeln der Gleichung (27) bedeuten,

$$\text{mod. } F(a) > G,$$

oder, was dasselbe ist (siehe die Gleichungen (35)),

$$\text{mod. } [(a-b)(a-c)\ldots] > G.$$

Hieraus folgt:

$$\text{mod. } (a-b) > \frac{G}{\text{mod. } (a-c)\ldots};$$

mithin

$$(53) \qquad \text{mod. } (a-b) > \frac{G}{(2k)^{m-2}},$$

indem die Anzahl der Differenzen

$$a-b,\ a-c,\ \text{etc.}\ldots,$$

welche die Wurzel a, combinirt mit allen übrigen, enthalten, $m-1$; die Anzahl der Differenzen hingegen, welche noch übrig bleiben, wenn man von jenen die Differenz $a-b$ wegnimmt, $m-2$ ist. Es ist also klar, daß die Zahl h auch dann den obigen Bedingungen entspricht, wenn man

$$(54) \qquad h = \frac{G}{(2k)^{m-2}}$$

setzt.

Anmerkung 3. Ist h nach einer der vorstehenden Methoden gefunden, so kann man für

$$k_1, k_2, \ldots k_n$$

eine abnehmende arithmetische Reihe wählen, bei welcher die Differenz gleich oder kleiner als h ist; wobei man sich jedoch auf diejenigen Glieder beschränkt, welche zwischen den Grenzen 0 und k liegen. Ist ferner g (siehe Aufg. 1, Anm. 3.) eine

untere Grenze der Zahlenwerthe aller reellen Wurzeln von (27), so kann man offenbar alle positiven oder negativen Glieder von (46) weglassen, deren Zahlenwerthe kleiner als g sind, indem man statt derselben nur

$$-g, \quad +g$$

schreibt. Ist die Reihe (46) auf diese Weise modificirt worden, so wird man in F (x) successive 1) die negativen Glieder dieser Reihe von $-k$ bis $-g$, 2) die positiven Glieder von $+g$ bis $+k$ substituiren, und so oft bei zweien auf einander folgenden Gliedern der Reihe, welche alle diese Glieder bilden, die Resultate entgegengesetzte Zeichen haben, wird eine reelle Wurzel zwischen diesen beiden Gliedern liegen.

Anmerkung 4. Hat man auf irgend einem Wege einen mehr oder weniger genäherten Werth für die reelle Wurzel a der Gleichung (27) gefunden, so kann man in sehr vielen Fällen sich auch von der entgegengesetzten Seite her der Wurzel a nähern und erhält dann zwei Grenzen, von welchen die eine größer ist als diejenigen reellen Wurzeln, welche kleiner als a sind, die andere hingegen kleiner als diejenigen, welche größer als a sind. Man geht hierbei von folgendem Satze aus.

Es seien

$$F_1(x), \; F_2(x), \; F_3(x), \text{ etc.} \ldots$$

die Coefficienten der 1ten, 2ten, 3ten, ... Potenz von x in der Reihenentwickelung von $F(x+z)$; a, b, c... die verschiedenen Wurzeln der Gleichung (27), und k eine Zahl, welche größer ist als deren Moduli. ξ sei ein Näherungswerth der reellen Wurzel a, und sowohl die Differenz $a-\xi$, als die Größe α, welche durch die Gleichung

$$(55) \qquad \alpha = -\frac{F(\xi)}{F_1(\xi)}$$

bestimmt wird, abgesehen vom Zeichen, so klein, daß in dem Polynom

$$(56) \quad F_1(\xi)+2(2a)F_2(\xi)+3(2\alpha)^2F_3(\xi)+4(2\alpha)^3F_4(\xi)+\text{etc.}\ldots$$

der Zahlenwerth des ersten Gliedes die Summe der Zahlenwerthe aller übrigen Glieder übersteigt. Endlich sei G eine Zahl, welche kleiner ist als der Ueberschuß des ersten Gliedes über die Summe aller übrigen, so ist ausgemacht, 1) daß die reelle Wurzel a zwischen den Grenzen

$$\xi, \quad \xi + 2\alpha$$

liegt; 2) daß die Differenz a—b oder b—a zwischen der Wurzel a und einer anderen reellen Wurzel nicht größer sein kann, als

$$(57) \qquad \frac{G}{(2k)^{m-2}}.$$

Beweis. Da das Polynom (56) einerlei Zeichen mit seinem ersten Gliede hat, so muß dies um so mehr der Fall sein bei den beiden Polynomien

$$(58) \begin{cases} -3F_1(\xi)+2(2\alpha)F_2(\xi)-2(2\alpha)^2F_3(\xi)+2(2\alpha)^3F_4(\xi) \\ -\text{etc.}\ldots\ldots, \\ F_1(\xi)+2(2\alpha)F_2(\xi)+2(2\alpha)^2F_3(\xi)+2(2\alpha)^3F_4(\xi)+\text{etc.}\ldots, \end{cases}$$

welche man erhält, wenn man die Brüche

$$\frac{F(\xi-2\alpha)}{\alpha}, \quad \frac{F(\xi+2\alpha)}{\alpha}$$

nach den aufsteigenden Potenzen von α mit Bezugnahme auf die Gleichung (55) entwickelt. Da die ersten Glieder dieser beiden Polynomien entgegengesetzte Zeichen haben, so wird dies auch bei beiden Brüchen der Fall sein müssen; desgleichen bei ihren Zählern

$$F(\xi-2\alpha), \quad F(\xi+2\alpha).$$

Es liegt demnach mindestens eine reelle Wurzel der Gleichung (27) zwischen den Grenzen

$$\xi-2\alpha, \quad \xi+2\alpha.$$

Ich behaupte aber, daß nur eine einzige zwischen diesen Grenzen liegen kann. — Es ist in der That leicht einzusehen, daß, wenn mehrere Wurzeln zwischen diesen Grenzen lägen, von welchen a und b diejenigen sein mögen, welche einander zunächst liegen, man für

$$F_1(a) = (a-b)(a-c)\ldots,$$
$$F_1(b) = (b-a)(b-c)\ldots,$$

zwei Größen mit entgegengesetzten Zeichen erhalten würde. Die Gleichung

$$(59) \qquad F_1(x) = 0$$

hätte folglich eine zwischen a und b liegende Wurzel, welche von der Form

$$\xi+z$$

sein würde, wo z zwischen den Grenzen -2α, $+2\alpha$ liegen müßte, was aber nicht der Fall sein kann. Denn setzt man

in (31) $y + z$ für z, und entwickelt man den ersten Theil der also modificirten Formel nach den aufsteigenden Potenzen von y, so erhält man

$$F(x+z) + y F_1(x+z) + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= F(x) + (y+z) F_1(x) + (y+z)^2 F_2(x) + \text{etc.} \ldots;$$

setzt man ferner die Coefficienten von y auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich,

$$(60) \begin{cases} F_1(x+z) = \\ F_1(x) + 2z F_2(x) + 3z^2 F_3(x) + 4z^3 F_4(x) + \text{etc.} \ldots \end{cases}$$

Folglich verwandelt sich die Reihenentwickelung von

$$(61) \qquad F_1(\xi + z)$$

in

$$(62) \quad F_1(\xi) + 2z F_2(\xi) + 3z^2 F_3(\xi) + 4z^3 F_4(\xi) + \text{etc.} \ldots,$$

und da in dem Polynom (56) der Zahlenwerth des ersten Gliedes die Summe der Zahlenwerthe aller übrigen Glieder übersteigt, so wird dies um so mehr bei dem Polynom (62) der Fall sein, so lange $z < 2\alpha$ ist. Hieraus folgt, daß in diesem Falle der Ausdruck (61) nicht verschwinden kann. Die Gleichung (59) hat demnach keine zwischen $\xi - 2\alpha$ und $\xi + 2\alpha$ liegende Wurzel, und deshalb kann auch die Gleichung (27) nur eine einzige zwischen diesen Grenzen liegende Wurzel haben. Diese Wurzel ist nothwendigerweise diejenige, welche der Größe ξ am nächsten liegt, und welche wir durch a bezeichnet haben.

Da ferner der Bruch

$$\frac{F(\xi + 2\alpha)}{\alpha}$$

dem zweiten Polynom in (58) gleich ist und mit dem ersten Gliede dieses Polynoms einerlei Zeichen hat, d. h. mit

$$F_1(\xi) = -\frac{F(\xi)}{\alpha},$$

so folgt, daß

$$F(\xi) \text{ und } F(\xi + 2\alpha)$$

zwei Größen mit entgegengesetzten Zeichen sind, und daß die Wurzel a zwischen den noch engeren Grenzen

$$\xi, \xi + 2a$$

liegen muß.

Was den zweiten Theil des obigen Satzes betrifft, so folgt dieser unmittelbar aus Anmerkung 2, indem die Größe G offenbar, abgesehen vom Zeichen, kleiner als das Polynom (62),

d. h. kleiner als die Reihenentwickelung von $F_1(\xi + z)$ ist, auch wenn der Zahlenwerth von z gleich oder kleiner als der Zahlenwerth von 2α, also auch kleiner als die Größe $F_1(a)$ ist, welche man aus $F_1(\xi + z)$ erhält, wenn man

$$z = a - \xi$$

setzt. Aus diesem zweiten Theile des Satzes folgt ferner, daß die reellen Wurzeln, welche größer als a sind, auch größer als die Grenze

$$(63) \qquad a + \frac{G}{(2k)^{m-2}},$$

sind, und daß die reellen Wurzeln, welche kleiner als a sind, auch kleiner als die Grenze

$$(64) \qquad a - \frac{G}{(2k)^{m-2}}$$

sein müssen.

Aufgabe 3. Beliebig nahe Werthe für die reellen Wurzeln der Gleichung (27) zu finden.

Auflösung. Zuvörderst wird man, mit Hülfe der vorigen Aufgabe, für jede reelle und positive Wurzel zwei Grenzen suchen, zwischen welchen sie liegen muß. Es seien nun z. B. x_0, X die Grenzen der reellen und positiven Wurzel a; so wird man sowohl die positiven, als auch die negativen Glieder von F (x) unter sich addiren. Diejenige von beiden Summen, welche für $x = x_0$ die kleinere ist, wird für $x = X$ die größere werden. Diese Summe sei nun φ (x), die andere χ (x); so werden die beiden ganzen Fnnctionen φ (x), χ(x) diejenigen Eigenschaften haben, von welchen im zweiten und dritten Lehrsatze die Rede war. Wenn demnach die Function φ (x) von der Art ist, daß sich die Gleichungen von der Form

$$\varphi(x) = \text{Constante}$$

leicht auflösen lassen, so liefern die Formeln (6) und (15) unmittelbar die Näherungswerthe von a. Dies ist z. B. jedesmal der Fall, wenn die Function φ (x) von der Form

$$B(x + C)^n + D$$

ist, wo B, C, D beliebige ganze Zahlen sind, und n eine ganze Zahl, welche gleich oder kleiner als m ist; denn alsdann erhält man successive die Glieder der Reihen (7) und (16) durch Ausziehung der n^{ten} Wurzel. Ist die Function φ (x) nicht von dieser Form, so läßt sie sich leicht auf dieselbe zurückführen, indem man zu beiden Theilen der Gleichung

$$\varphi(x) = \chi(x)$$

nur ein ganzes Polynom $\psi(x)$, welches nur aus positiven Gliedern besteht, zu addiren braucht. Es ist in der That einleuchtend, daß die durch die Addition eines solchen Polynoms modificirten Werthe von $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ immer noch denselben Bedingungen Genüge leisten. Das Polynom $\psi(x)$ kann übrigens unendlich viele Werthe haben. Es sei z. B.

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 + 8,$$

so ist der durch die Addition von $\psi(x)$ modificirte Werth desselben

$$(x+1)^3 + 7,$$

wenn man

$$\psi(x) = 3x$$

setzt; oder

$$(x+2)^3,$$

wenn man

$$\psi(x) = 3x^2 + 12x$$

setzt. etc..... Es verdient übrigens noch bemerkt zu werden: 1) daß man immer $\psi(x)$ so wählen kann, daß $B = 1$ wird; 2) daß in vielen Fällen sich eine von den Zahlen C, D auf Null reduciren wird. Nachdem wir nach der vorstehenden Methode die reellen und positiven Wurzeln der Gleichung (27) bestimmt haben, werden wir noch nach derselben Methode die positiven Wurzeln der Gleichung

$$(65) \qquad F(-x) = 0$$

zu suchen haben, um auch die negativen Wurzeln von (27) zu erhalten.

Anmerkung. Es gibt außer der eben mitgetheilten Näherungsmethode noch viele andere, unter welchen die Newton'sche herausgehoben zu werden verdient. Sie setzt voraus, daß man bereits einen Näherungswerth der gesuchten Wurzel kenne, und besteht darin, daß man als Verbesserung dieses Werthes die durch die Gleichung

$$(55) \qquad \alpha = -\frac{F(\xi)}{F_1(\xi)}$$

gegebene Größe α betrachtet. Da jedoch diese Methode nicht immer anwendbar ist, so ist es der Mühe werth, zu untersuchen: in welchen Fällen man dieselbe anwenden kann. Wir stellen deshalb folgende Sätze auf.

Lehrsatz 4. Ist a irgend eine reelle Wurzel der Gleichung (27), und ξ ein Näherungswerth dieser Wurzel, so berechne man nach Gleichung (55) die Größe α. Ist dieses α, abgesehen vom Zeichen, so klein, daß in dem Polynom (56) der Zahlenwerth des ersten Gliedes die Summe der Zahlenwerthe aller übrigen Glieder übersteigt, so liegt $\xi + \alpha$ dem a näher als ξ.

Beweis. Wir haben bereits gesehen (Aufg. 2., Anm. 4.), daß in dem angenommenen Falle die Wurzel a zwischen den Grenzen

$$\xi,\ \xi + 2\alpha$$

liegen muß. Setzt man daher

$$a = \xi + z, \tag{66}$$

so wird z zwischen den Grenzen 0 und 2α liegen und der Gleichung

$$F(\xi + z) = 0$$

Genüge leisten, oder, was dasselbe ist, der Gleichung

$$F(\xi) + zF_1(\xi) + z^2 F_2(\xi) + \text{etc.} \ldots = 0. \tag{67}$$

Setzt man nun der Bequemlichkeit wegen

$$q = -\frac{(F_2(\xi) + zF_3(\xi) + \text{etc.}\ldots)}{F_1(\xi)}, \tag{68}$$

und nimmt man Bezug auf die Formel (55), so verwandelt sich (67) in

$$z = \alpha + qz^2. \tag{69}$$

Es ist demnach

$$a = \xi + z = \xi + \alpha + qz^2. \tag{70}$$

Hieraus folgt, daß, wenn man $\xi + \alpha$ statt ξ für a setzt, man nicht mehr einen Fehler begehen wird, welcher dem Zahlenwerthe von z gleich ist, sondern nur einen Fehler = Zahlenw. qz^2. Da ferner das Polynom (56) einerlei Zeichen mit seinem ersten Gliede hat, so wird dies auch bei den Polynomien

$$(71)\quad \begin{cases} F_1(\xi) + 2(2\alpha)F_2(\xi) + 2(2\alpha)zF_3(\xi) + \text{etc.}\ldots = (1 - 4aq)\cdot F_1(\xi) \text{ u.} \\ F_1(\xi) - 2(2\alpha)F_2(\xi) - 2(2\alpha)zF_3(\xi) - \text{etc.}\ldots = (1 + 4aq)\cdot F_1(\xi) \end{cases}$$

der Fall sein, und es muß daher der Zahlenwerth von $2\alpha q$, und um so mehr auch der von qz, kleiner als $\frac{1}{2}$ sein. Hieraus folgt unmittelbar, daß Zahlenwerth $qz^2 <$ Zahlenwerth $\frac{1}{2}z$ ist. Also ist der Fehler, welchen man macht, wenn man $\xi + \alpha$ als Näherungswerth für a setzt, kleiner als derjenige, welchen man bei ξ begeht.

Anmerkung 1. Da man aus (69)

$$z = \frac{\alpha}{1-qz}$$

erhält, und da Zahlenwerth $qz < \frac{1}{2}$ ist, so kann man sicher sein, daß der Werth von z immer zwischen den Grenzen

$$\frac{2}{3}\alpha \text{ und } 2\alpha$$

liegen wird.

Anmerkung 2. Löst man die Gleichung (69) so auf, als wäre q bekannt, so findet man

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha q}}{2q} = \frac{2\alpha}{1 \mp \sqrt{1-4\alpha q}}.$$

$\sqrt{1-4\alpha q}$ ist hier mit einem doppelten Zeichen behaftet; da aber $z < 2\alpha$ sein muß, so ist es klar, daß man nur das untere Zeichen nehmen darf. Es ist demnach

$$(72) \qquad z = \frac{2\alpha}{1+\sqrt{1-4\alpha q}}.$$

Sind also q_0, Q zwei Grenzen, zwischen welchen die durch Formel (68) gegebene Größe q liegen muß, so folgt aus (72): daß der genaue Werth von z zwischen

$$(73) \qquad \frac{2\alpha}{1+\sqrt{1-4\alpha q_0}} \text{ und } \frac{2\alpha}{1+\sqrt{1-4\alpha Q}}$$

liegen muß. Es werden demnach alle Decimalziffern, welche in diesen beiden auf Zahlen zu reducirenden Werthen gemeinschaftlich sind, dem wahren Werthe gleichfalls angehören.

Anmerkung 3. Ist Zahlenw. $Q >$ Zahlenw. q, zugleich aber kleiner als 1, und ist die Differenz $a - \xi = z$, abgesehen vom Zeichen, kleiner als eine Einheit in der Decimalstelle von der n^{ten} Ordnung, d. h. ist

$$(74) \qquad \text{Zahlenw. } z < \left(\frac{1}{10}\right)^n,$$

so ist die Differenz

$$a - (\xi + \alpha) = qz^2,$$

abgesehen vom Zeichen, kleiner als eine Einheit in der Decimalstelle von der $2n^{ten}$ Ordnung, und es ist daher

$$(75) \qquad \text{Zahlenw. } qz^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n}.$$

Man erhält also für den Näherungswerth $\xi + \alpha$ doppelt so viele Decimalstellen genau als für ξ.

Wäre der Zahlenwerth von Q nicht nur kleiner als 1, sondern sogar kleiner als $\frac{1}{10}$, so würde sich aus Formel (74) ergeben

$$\text{Zahlenw. } q z^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+1},$$

und setzt man in diesem Falle ganz allgemein Zahlenwerth $z < \left(\frac{1}{10}\right)^r$, wo r eine beliebige ganze Zahl ist, so folgt aus (74)

$$(76) \qquad \text{Zahlenw. } q z^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+r}.$$

Ist $Q > 1$, aber kleiner als $(10)^r$, so ist

$$(77) \qquad \text{Zahlenw. } q z^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n-r}.$$

Anmerkung 4. Der Fehler, welchen man begeht, wenn man $\xi + \alpha$ als Näherungswerth von a annimmt, oder der Zahlenwerth von $q z^2$ kann gleichfalls durch Annäherung gefunden werden. Denn man findet mit Bezugnahme auf (69)

$$qz^2 = q(\alpha + qz^2)^2 = q\alpha^2 + (2\alpha) q^2 z^2 + q^3 z^4.$$

Ist nun der Zahlenwerth von 2α, also auch Zahlenwerth $z < \left(\frac{1}{10}\right)^n$, und Zahlenwerth Q, also auch Zahlenwerth $q < (10)^{\mp r}$, wo n und r ganze Zahlen bedeuten, so ist offenbar

$$\text{Zahlenw. } (2\alpha) q^2 z^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^{3n \mp 2r},$$

und

$$\text{Zahlenw. } q^3 z^4 < \left(\frac{1}{10}\right)^{4n \mp 3r}.$$

Hat man sich ferner überzeugt, daß der Zahlenwerth des Bruches

$$(78) \qquad \frac{F_3(\xi) + z F_4(\xi) + \text{etc.} \ldots}{F_1(\xi)}$$

kleiner als $(10)^{\pm s}$ ist, wo s eine ganze Zahl bedeutet, so kann man

$$-\alpha^2 \frac{F_2(\xi)}{F_1(\xi)}$$

als Näherungswerth von $q\alpha^2$ ansehen, ohne befürchten zu dürfen, daß der begangene Fehler größer als

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{3n \pm s}$$

sein werde. Wählt man also, anstatt des Näherungswerthes $\xi + \alpha$, $\xi + \alpha - \alpha^2 \frac{F_2(\xi)}{F_1(\xi)}$, d. h. setzt man

$$(79) \qquad a = \xi + \alpha - \alpha^2 \frac{F_2(\xi)}{F_1(\xi)},$$

so wird der begangene Fehler nur noch Einfluß auf die Decimalstellen von den Ordnungen

$$3n \pm s,\ 3n \pm 2r,\ 4n \pm 3r$$

haben. Ist Zahlenw. $Q < \left(\frac{1}{10}\right)^r$, und der Zahlenwerth des Bruches (78) kleiner als $\left(\frac{1}{10}\right)^s$, so wird der Fehler kleiner als

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{3n}.$$

Man braucht also dann nur den zweiten Theil der Gleichung (79) für ξ zu substituiren, so erhält man in dem Näherungswerthe von a eine dreifache Anzahl von Decimalziffern genau. Dieses findet auch dann sehr nahe statt, wenn n eine sehr große Zahl ist. Diese Resultate stimmen mit denjenigen überein, welche Nicholson in seinem unter dem Titel: „Essay on involution and evolution" in London erschienenen Werke erhalten hat.

Lehrsatz 5. Es sei, unter übrigens gleichen Voraussetzungen (wie im vorigen Satze), der Zahlenwerth des ersten Gliedes des Polynoms (56), d. h. des Polynoms, welches der Entwickelung von $F_1(\xi + 2\alpha)$ gleich ist, nicht nur größer als die Summe der Zahlenwerthe aller übrigen Glieder, sondern sogar größer als das Doppelte von dieser Summe. Ist nun ξ_1 eine zwischen den Grenzen

$$\xi, \xi + 2\alpha$$

liegende Größe, so wird

$$\xi_1 - \frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}$$

der Wurzel a näher liegen als ξ.

Beweis. Die Differenz

$$a - \xi$$

ist, wie sich leicht darthun läßt, größer als

$$a - \left[\xi_1 - \frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}\right] = (a - \xi_1) - \frac{F(a) - F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)},$$

oder, was dasselbe ist, der Zahlenwerth des Bruches

$$\frac{F_1(\xi_1) - \dfrac{F(a) - F(\xi_1)}{a - \xi_1}}{F_1(\xi_1)}$$

kleiner als 1. Denn es sei $\frac{u}{v}$ dieser Bruch, so darf nur gezeigt werden, daß

$$v - u \text{ und } v + u,$$

d. h.,

$$(80) \qquad \frac{F(a) - F(\xi_1)}{a - \xi_1} \text{ und } 2F_1(\xi_1) - \frac{F(a) - F(\xi_1)}{a - \xi_1}$$

einerlei Zeichen haben. Setzt man aber

$$(81) \qquad a = \xi + z, \text{ und } \xi_1 = \xi + \beta,$$

wo z und β einerlei Zeichen haben und zwischen 0 und 2α liegen, so verwandeln sich die Ausdrücke (80), nach Entwickelung der Functionen

$$F(\xi + z),\ F(\xi + \beta),\ F_1(\xi + \beta),$$

respective in

$$F_1(\xi) + (\beta + z)F_2(\xi) + (\beta^2 + \beta z + z^2)F_3(\xi) + \text{etc}\ldots,$$
$$F_1(\xi) - (\beta + z - 4\beta)F_2(\xi) - (\beta^2 + \beta z + z^2 - 6\beta^2)F_3(\xi) - \text{etc}\ldots$$

Da in jedem dieser beiden Polynomien der Zahlenwerth des Coefficienten von $F_n(\xi)$ offenbar kleiner als der der Größen

$$nz^{n-1},\ 2n\beta^{n-1},$$

folglich auch kleiner als der des Productes

$$n(2\alpha)^{n-1}$$

ist, so ist es klar, daß beide einerlei Zeichen mit $F_1(\xi)$ haben, wenn der im fünften Lehrsatze angegebenen Bedingung Genüge geleistet wird. Folglich ꝛc.

Anmerkung 1. Bei den successiven Näherungswerthen

$$\xi_1 \text{ und } \xi - \frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}$$

sind die Fehler respective den Zahlenwerthen von

$$a - \xi_1 \text{ und } a - \xi_1 + \frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}$$

gleich. Ferner erhält man mit Bezugnahme auf die Formel (81)

(82) $$a - \xi_1 = z - \beta$$

und

$$a - \xi_1 + \frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)} = a - \xi_1 - \frac{F(a) - F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}$$

$$= z - \beta - \frac{F(\xi + z) - F(\xi + \beta)}{F_1(\xi + \beta)},$$

und, wenn man die Functionen

$$F(\xi + z),\ F(\xi + \beta),\ F_1(\xi + \beta)$$

entwickelt,

(83) $$a - \xi_1 + \frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)} =$$

$$-(z-\beta)^2 \cdot \frac{F_2(\xi) + (z+2\beta)F_3(\xi) + (z^2+2\beta z+3\beta^2)F_4(\xi) + \text{etc...}}{F_1(\xi) + 2\beta F_2(\xi) + 3\beta^2 F_3(\xi) + \text{etc...}}$$

Ist nun für alle Werthe von β und von z, welche zwischen 0 und 2α liegen, der Zahlenwerth des Polynoms

(84) $F_2(\xi) + (z+2\beta)F_3(\xi) + (z^2+2\beta z+3\beta^2)\ F_4(\xi) + \text{etc....}$

kleiner als M, und der des Polynoms

(85) $F_1(\xi) + 2\beta F_2(\xi) + 3\beta^2 F_3(\xi) + \text{etc....}$

kleiner als N, und ist

(86) $$\text{Zahlenw.}\ (z-\beta) < \left(\frac{1}{10}\right)^n,$$

und

(87) $$\frac{M}{N} < (10)^{\mp r},$$

wo n und r beliebige ganze Zahlen bedeuten, so folgt aus (83)

(88) $$\text{Zahlenw.}\left(a - \xi_1 + \frac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}\right) < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n \mp r}.$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß man, um passende Werthe für M und N zu erhalten, nur 1) in dem Polynom (84), an die Stelle von z und β, 2α zu setzen, alsdann die Summe

der Zahlenwerthe aller Glieder zu berechnen, 2) in dem Polynom (85), statt β, 2α zu setzen, und alsdann die Differenz zwischen dem Zahlenwerthe des ersten Gliedes und der Summe der Zahlenwerthe aller übrigen Glieder zu suchen braucht.

Anmerkung 2. Setzt man, unter den im fünften Lehrsatze gemachten Voraussetzungen, successive

$$(89)\begin{cases} \xi_1 = \xi - \dfrac{F(\xi)}{F_1(\xi)}, \; \xi_2 = \xi_1 - \dfrac{F(\xi_1)}{F_1(\xi_1)}, \\ \xi_3 = \xi_2 - \dfrac{F(\xi_2)}{F_1(\xi_2)}, \text{ etc.....}, \end{cases}$$

so sind die Größen ξ, ξ_1, ξ_2, ξ_3, etc.... Werthe, welche sich der Wurzel a immer mehr und mehr nähern. Gibt man ferner den Größen M und N die in Anm. 1. gefundenen Werthe, und ist

$$\text{Zahlenw.}\,(a-\xi) < \left(\frac{1}{10}\right)^n,$$

so ist auch

$$\text{Zahlenw.}\,(a-\xi_1) < \left(\frac{1}{10}\right)^{2n \pm r},$$

$$\text{Zahlenw.}\,(a-\xi_2) < \left(\frac{1}{10}\right)^{4n \pm 3r},$$

$$\text{Zahlenw.}\,(a-\xi_3) < \left(\frac{1}{10}\right)^{8n \pm 7r},$$

etc.....

Diese Formeln enthalten den von Fourier in dem Bulletin de la Société philomatique (livraison de mai 1818) in Beziehung auf die Anzahl der Decimalstellen, welche man bei jeder neuen Operation nach der Newton'schen Methode genau erhält, mitgetheilten Satz.

So oft der Bruch $\frac{M}{N}$ kleiner als die Einheit ist, kann man $r = 0$ setzen, und die successiven Differenzen zwischen der Wurzel a und ihren Näherungswerthen

$$\xi, \; \xi_1, \; \xi_2, \; \xi_3, \; \text{etc.....}$$

sind alsdann respective kleiner als die Zahlen

$$\left(\frac{1}{10}\right)^n, \left(\frac{1}{10}\right)^{2n}, \left(\frac{1}{10}\right)^{4n}, \left(\frac{1}{10}\right)^{8n}, \text{ etc....}$$

Die Anzahl der Decimalstellen, welche genau sind, wird also bei jeder neuen Operation wenigstens sich verdoppeln.

Die vorstehenden Untersuchungen liefern mehrere Auflösungsmethoden für numerische Gleichungen. Um die Vorzüge dieser Methoden fühlbarer zu machen, wollen wir sie auf die Gleichungen

$$(90) \qquad x^3 - 2x - 5 = 0 \quad \text{und}$$

$$(91) \qquad x^3 - 7x + 7 = 0$$

anwenden, welche Lagrange (Auflösung der numerischen Gleichungen, Cap. 4.) als Beispiele gewählt hat, und welche schon früher durch Newton behandelt worden sind.

Betrachten wir zuvörderst (90), so finden wir (Lehrs. 3., Anm. 2.), daß sie eine einzige positive Wurzel hat, welche zwischen

$$\sqrt{2.2} = 2 \text{ und } \sqrt{2.5} = 2,15\ldots$$

liegt. Ferner entspricht der positive Werth von x, welcher der Gleichung

$$2x + 5 = x^3$$

Genüge leisten wird (Aufg. 1, Anm. 4.), der Bedingung

$$2\sqrt{5.2x} < x^3,$$

oder, was dasselbe ist, der Bedingung

$$x > (40)^{\frac{1}{5}} = 2,09\ldots.$$

Die Wurzel, von welcher die Rede ist, liegt also zwischen den Grenzen 2,09 und 2,15..., so daß also 2,1 ein bis auf ein Zehntel genauer Näherungswerth von a sein wird. Um einen genaueren Werth zu erhalten, darf man nur bemerken, daß im vorliegenden Falle

$$F(x) =$$

$$x^3 - 2x - 5,\ F_1(x) = 3x^2 - 2,\ F_2(x) = 3x,\ F_3(x) = 1$$

ist, und daß, wenn man

$$\xi = 2,1$$

setzt, die im vierten Lehrsatze angegebene Bedingung erfüllt wird. Da nun nach Gleichung (55)

$$\alpha = \frac{5 + \frac{4}{3}\xi}{3\xi^2 - 2} - \frac{\xi}{3} = -\,0,005431878\ldots$$

ist, so erhält man als näheren Werth von x

$$\xi + \alpha = 2,094568121\ldots,$$

und

$$\xi + \alpha - \alpha^2 \frac{F_2(\xi)}{F_1(\xi)} = \xi + \alpha - \alpha^2 . \frac{3\xi}{3\xi^2 - 2} = 2{,}0945515\ldots$$

Da endlich der genaue Werth von x von der Form $x = \xi + z$ ist, so wird z eine Größe sein, welche zwischen 0 und 2α liegt, und da offenbar

$$-q = \frac{F_2(\xi) + z F_3(\xi)}{F_1(\xi)} = \frac{6{,}3 + z}{11{,}23} < 0{,}6 < 1,$$

$$\frac{F_3(\xi)}{F_1(\xi)} = \frac{1}{11{,}23} < 0{,}1,$$

Zahlenw. z = Zahlenw. $(\alpha + q z^2)$
< Zahlenw. $\alpha + (2\alpha)^2$. Zahlenw. q ist, und < 0,01,

so folgt aus Lehrs. 4, Anm. 3 und 4, daß, wenn man

$$x = 2{,}0945681$$

setzt, der Fehler kleiner als 0,0001 ist, und daß, wenn man

$$x = 2{,}0945515$$

setzt, der Fehler kleiner als 0,000001 sein wird.

Statt die allgemeine Formel anzuwenden, könnte man auch auf folgende Weise verfahren: — Nachdem man 2,1 gefunden hat, setzt man in (90)

$$x = 2{,}1 + z$$

und erhält hieraus, wenn man alle Glieder durch den Coefficienten von z dividirt,

$$(92)\quad \left\{ \begin{array}{l} 0{,}005431878\ldots + z + 0{,}560997328\ldots z^2 \\ \qquad\qquad + 0{,}089047195\ldots z^3 = 0, \end{array} \right.$$

oder, was dasselbe ist,

$$(93)\qquad z = -0{,}005431878\ldots + q z^2,$$

wo der Werth von q durch die Formel

$$(94)\quad q = -0{,}560997328\ldots - 0{,}089047195\ldots z$$

bestimmt wird. Das Doppelte des ersten Gliedes von (92) ist ungefähr 0,01, und da man für den ersten Theil dieser Gleichung Resultate mit entgegengesetzten Zeichen erhält, wenn man successive

$$z = 0,\quad z = -0{,}01$$

setzt, so muß eine Wurzel zwischen 0 und — 0,01 liegen. Um zu zeigen, daß diese Wurzel die einzige ist, welche zwischen diesen Grenzen liegt, braucht man nur zu bemerken, daß nach Formel (60) die Gleichung

$$F_1(2{,}1 + z) = 0$$

sich auf

$1 + 2 \times 0{,}560997328\ldots z + 3 \times 0{,}089047195\ldots z^2 = 0$

reducirt, und daß dieser Gleichung durch keinen zwischen 0 und $-0{,}01$ liegenden Werth Genüge geleistet werden kann. Ferner ist es klar, daß, für einen solchen Werth von z, die durch Formel (94) bestimmte Größe q zwischen $-0{,}560$ und $-0{,}561$ liegt, und da man aus (93) erhält

$$(95)\quad \left\{ \begin{array}{l} z = -0{,}005431878\ldots - 0{,}000029505\ldots(-q) \\ \qquad -0{,}000000320\ldots\ (-q)^2 - \text{etc.}\ldots, \end{array} \right.$$

so folgt: 1) wenn man $-q = 0{,}560$ setzt,

$$z = -0{,}00544850\ldots,$$

2) wenn man $-q = 0{,}561$ setzt,

$$z = -0{,}00544853\ldots$$

Folglich liegt der reelle und positive Werth von x, welcher der Gleichung (90) Genüge leistet, zwischen den Grenzen

$$2{,}1 - 0{,}00544850 = 2{,}09455150 \text{ und}$$
$$2{,}1 - 0{,}00544854 = 2{,}09455146;$$

diese Gleichung hat demnach eine einzige positive Wurzel, welche ziemlich nahe

$$2{,}0945515$$

ist. — Man kann sich übrigens leicht davon überzeugen, daß sie keine negativen Wurzeln hat. Denn, hätte sie auch nur eine einzige, so würde man der Gleichung

$$(96)\qquad x^3 - 2x + 5 = 0$$

durch einen positiven Werth von x Genüge leisten können, und dieser müßte nach Aufg. 1, Anm. 5, zu gleicher Zeit kleiner als die positive Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 2x = 0,$$

d. h. kleiner als

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots,$$

und größer als die Wurzel der Gleichung

$$5 - 2x = 0,$$

d. h. größer als

$$\frac{5}{2} = 2{,}5$$

sein, was absurd ist.

Wir wollen nun zur Gleichung (91) übergehen und zuvörderst ihre positiven Wurzeln aufsuchen. Um eine obere Grenze für diese Wurzeln zu erhalten, braucht man nur zu be-

merken, daß die vorgelegte Gleichung auch unter die Form

$$x^3 + 7 = 7x$$

gebracht werden kann, und man erhält nach Aufg. 1, Anm. 4,

$$2\sqrt{7x^3} < 7x,$$

mithin

$$x < \frac{7}{4}.$$

Man kann also $\frac{7}{4}$ als Näherungswerth der größten positiven Wurzel ansehen. Setzt man hierauf in (91)

$$x = \frac{7}{4} + z,$$

so findet man

$$(97)\quad 0{,}05 + z + 2{,}40\,z^2 + \frac{32}{70}\,z^3 = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(98)\quad z = -0{,}05 + q\,z^2,$$

wo der Werth von q durch die Formel

$$(99)\quad q = -2{,}40 - \frac{32}{70}\,z$$

bestimmt wird.

Das Doppelte des ersten Gliedes von (97) ist 0,1, und da der erste Theil dieser Gleichung das Zeichen ändert, wenn man successive $z = 0$, $z = -0{,}1$ setzt, während das Polynom

$$1 + 2 \times 2{,}40\,z + 3 \times \frac{32}{70}\,z^2$$

zwischen diesen Grenzen beständig positiv bleibt, so folgt: daß sie eine zwischen 0 und $-0{,}1$ liegende reelle Wurzel hat, aber auch nur eine einzige. Der correspondirende Werth von q liegt offenbar zwischen den beiden Größen

$$-2{,}354\ldots, \quad -2{,}40.$$

Man erhält ferner aus (98)

$$(100)\quad \begin{cases} z = -\dfrac{0{,}1}{1 + \sqrt{(1 + 0{,}2\,.\,q)}} \\ \quad = -0{,}05 - 0{,}0025\,(-q) - 0{,}00025\,(-q)^2 \\ \qquad - 0{,}00003125\,(-q)^3 - \text{etc.}\ldots. \end{cases}$$

Setzt man hier successive

$$q = -2{,}354, \quad q = -2{,}40,$$

so findet man als correspondirende Werthe von z

$$z = -0{,}05788\ldots, \quad z = -0{,}05810\ldots$$

Hieraus folgt: daß die größte Wurzel der vorgelegten Gleichung zwischen den Grenzen

$$\frac{7}{4} - 0{,}05788\ldots = 1{,}69211\ldots$$

und

$$\frac{7}{4} - 0{,}05810\ldots = 1{,}69189\ldots$$

liegt. Nennt man daher die größte Wurzel der Gleichung a, so ist der durch die Formel

(101) $$a = 1{,}6902$$

gegebene Werth von a ein näherer Werth als $\frac{7}{4}$, und man kann durch eine einzige Operation einen neuen erhalten, bei welchem der Fehler sich nur noch auf die zwölfte Decimalstelle erstreckt. Außer der positiven Wurzel a, welche wir so eben betrachtet haben, hat die Gleichung (91) offenbar auch noch eine negative Wurzel, welche, abgesehen vom Zeichen, der einzigen positiven Wurzel der Gleichung

(102) $$x^3 - 7x - 7 = 0$$

gleich ist und folglich nach Lehrs. 3, Anm. 2, zwischen den Grenzen

$$-\sqrt{14} = -3{,}7416\ldots \text{ und } -\sqrt[3]{14} = -2{,}41\ldots$$

liegt. Diese negative Wurzel wollen wir c nennen. Die dritte Wurzel b der Gleichung (91) ist offenbar reell und positiv, da das Product a b c der drei Wurzeln der dem letzten Gliede entgegengesetzten Größe gleich sein, folglich 7 sein muß. Um diese dritte Wurzel zu bestimmen, wird man zuvörderst eine Zahl G suchen, welche dem Zahlenwerthe von $F_1(a)$ gleich, oder kleiner als dieser ist. Nun ist im vorliegenden Falle

$$F(x) = x^3 - 7x + 7,$$
$$F_1(x) = 3x^2 - 7,$$

folglich

$$F_1(a) = 3a^2 - 7.$$

Man kann also annehmen

$$G = 3(1{,}69189)^2 - 7 = 1{,}5874\ldots$$

Ferner ist nach dem Vorhergehenden

$$a < 1{,}6922, \quad -c < 3{,}7417,$$

mithin

$$a - c < 5,4339.$$

Aus Aufg. 2, Anm. 2, folgt daher

$$a - b > \frac{G}{a - c} > \frac{1,5874}{5,4339} = 0,29212\ldots$$

Es ist demnach

$$b < 1,69211\ldots - 0,29214\ldots < 1,40.$$

Nachdem wir auf diese Weise gefunden haben, daß $b < 1,40$ ist, werden wir

$$x = 1,40 + z$$

setzen. Die Gleichung (91) ergibt in diesem Falle

$$(103) \qquad 0,05 + z - 3,75\,.\,z^2 - \frac{25}{28}\,z^3 = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(98) \qquad z = -\,0,05 + q\,z^2,$$

wo

$$(104) \qquad q = 3,75 + \frac{25}{28}\,z \text{ ist.}$$

Das Doppelte des ersten Gliedes von (103) ist 0,1, und da der erste Theil dieser Gleichung sein Zeichen ändert, wenn man successive $z = 0$ und $z = -\,0,1$ setzt, während das Polynom

$$1 - 2 \times 3,75\,.\,z - 3 \times \frac{25}{28}\,z^2$$

zwischen diesen Grenzen beständig positiv bleibt, so folgt: daß in diesem Intervall nur eine einzige reelle Wurzel liegt. Der correspondirende Werth von q liegt offenbar zwischen

$$3,66 \text{ und } 3,75.$$

Substituirt man diese beiden Werthe successive für q in (100), so erhält man zwei neue Grenzen für z, nämlich

$$-\,\frac{0,1}{1 + \sqrt{1,732}} = -\,0,04317\ldots$$

und

$$-\,\frac{0,1}{1 + \sqrt{1,750}} = -\,0,04305\ldots$$

Die Wurzel b liegt demnach zwischen

$$1,40 - 0,04317\ldots = 1,35682\ldots$$

und

$$1,40 - 0,04305\ldots = 1,35694\ldots$$

Man erhält mithin einen Näherungswerth bis auf ein Zehntausendstel genau, wenn man

(105) $$b = 1{,}3569$$ setzt.

Was die negative Wurzel c der Gleichung (91) betrifft, so wissen wir bereits, daß dieselbe zwischen den Grenzen

$$-3{,}7416\ldots \text{ und } -2{,}41\ldots$$

liegt. Man kann daher zuvörderst -3 als einen Näherungswerth für diese Wurzel ansehen und in (91)

$$x = -3 + x$$

setzen. Man findet alsdann

(106) $$0{,}05 + z = 0{,}45 \cdot z^2 + 0{,}05 \cdot z^3 = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

(98) $$z = -0{,}05 + q z^2,$$

wo

(107) $$q = 0{,}45 - 0{,}05\, z$$ ist.

Ferner ist leicht einzusehen: 1) daß (106) eine einzige, zwischen $0, -0{,}1$ liegende reelle Wurzel hat; 2) daß der correspondirende Werth von q zwischen den Grenzen

$$0{,}45 \text{ und } 0{,}455$$

liegt; 3) daß man, wenn man diese beiden Zahlen für *q in (100)* substituirt, zwei neue Näherungswerthe für z erhält, nämlich

$$-\frac{0{,}1}{1+\sqrt{1{,}09}} = -0{,}048922\ldots$$

und

$$-\frac{0{,}1}{1+\sqrt{1{,}091}} = -0{,}048911\ldots$$

Mithin ist

(108) $$c = -3{,}04892$$

ein bis auf ein Hunderttausendstel genauer Näherungswerth von c.

Uebrigens hätte man den Näherungswerth von c unmittelbar aus den Formeln (100) und (105) herleiten können. Denn da in (91) der Coefficient von x^2, Null ist so folgt:

$$a + b + c = 0,$$

$$c = -a - b,$$

mithin sehr nahe

$$c = -(1{,}6920 + 1{,}3569) = -3{,}0489.$$

Zum Schlusse wollen wir noch zwei Lehrsätze mittheilen, welche von Descartes herrühren und sich auf die Bestim-

mung der Anzahl der positiven und negativen Wurzeln beziehen, welche eine Gleichung von irgend einem Grade haben kann. Zu diesem Zwecke wollen wir zuvörderst die Anzahl von Folgen und Abwechselungen der Zeichen, welche eine Reihe von Größen darbieten kann, wenn man die verschiedenen Glieder derselben mit einander nach der Ordnung, in welcher sie auf einander folgen, vergleicht, betrachten.

Es sei

$$(109) \qquad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m$$

die zu betrachtende, aus $m+1$ Gliedern bestehende Reihe. Ist keins dieser Glieder Null, so ist die Anzahl der Abwechselungen der Zeichen, welche man erhält, wenn man sie paarweise in der Ordnung, in welcher sie auf einander folgen, vergleicht, bestimmt. Wenn aber irgend welche Glieder sich auf Null reduciren, so kann man das Zeichen eines jeden derselben willkürlich bestimmen, und die Anzahl der Abwechselungen der Zeichen wird alsdann von dieser Bestimmung abhängen, jedoch nicht kleiner als ein gewisses Minimum, noch auch größer als ein gewisses Maximum sein können. Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch in Bezug auf die Folgen der Zeichen machen. Es ist aber einleuchtend, daß man, was die Anzahl der Abwechselungen betrifft, das Maximum findet, wenn man annimmt, daß jedes fehlende Glied dasjenige Zeichen habe, welches dem des vorhergehenden entgegengesetzt ist. — Gesetzt z. B., die Reihe (109) bestehe aus den vier Gliedern

$$+1,\ 0,\ 0,\ -1,$$

so erhält man das Maximum der Abwechselungen, wenn man das zweite Glied als negativ ansieht, das dritte hingegen als positiv, oder, was dasselbe ist, wenn man schreibt

$$+1,\ -0,\ +0,\ -1.$$

In dem vorliegenden Falle wird demnach das besagte Maximum 3 sein. Dagegen hätte man das Minimum der Abwechselungen erhalten, und zwar 1, wenn man jedem Gliede, welches Null ist, dasselbe Zeichen gegeben hätte, mit welchem das vorhergehende behaftet ist, d. h. wenn man geschrieben hätte

$$+1,\ +0,\ +0,\ -1.$$

Nachdem diese Principien festgestellt sind, wird man ohne Mühe zu folgenden Sätzen gelangen.

Lehrsatz 6. Die Constante h sei reell und positiv, und man multiplicire das Polynom

$$(110) \qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

mit dem linearen Factor $x+h$, so wird durch diese Multiplication das Maximum der Abwechselungen zwischen den Coefficienten der absteigenden Potenzen von x nicht vermehrt.

Beweis. Multiplicirt man (110) mit $x+h$, so erhält man ein Polynom, in welchem die Coefficienten der absteigenden Potenzen von x respective

(111) $a_0, a_1+ha_0, a_2+ha_1, \ldots, a_m+ha_{m-1}, ha_m$

sind. Man darf also nur beweisen, daß die Anzahl der Abwechselungen beim Uebergange von der Reihe (109) zur Reihe (110) nicht zunimmt, wenn man in beiden Reihen für diese Anzahl das Maximum nimmt. Zuvörderst wird, wenn die Zeichen der Glieder, welche Null sind, nach der obigen Regel bestimmt werden, jedes Glied der Reihe (111)

$$a_n+ha_{n-1}$$

entweder das Zeichen von a_n, oder das von a_{n-1} (in (109)) haben. Diese Behauptung ist gleich einleuchtend in den beiden Fällen, welche hier eintreten können, also 1) wenn die Glieder a_{n-1}, a_n entweder ursprünglich, oder nach der oben angenommenen Regel mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind; 2) wenn a_n und a_{n-1} von Null verschiedene Werthe und zugleich einerlei Zeichen haben.

Haben daher die Größen

(112) $ha_0, ha_1, ha_2, \ldots ha_{m-1}, ha_m$

mit den correspondirenden Gliedern der Reihe (109) einerlei Zeichen, so kann man ohne die Aufeinanderfolge der Zeichen in der Reihe (111) zu ändern, jedes Binom von der Form

$$a_n+ha_{n-1}$$

durch eins der beiden Monomien a_n, ha_{n-1} ersetzen. Verfährt man also, so erhält man eine neue Reihe, in welcher auf jedes Glied von der Form a_n ein anderes folgt, welches entweder gleich a_{n+1} oder gleich ha_n ist, während auf das Glied von der Form ha_n entweder ha_{n+1} oder a_{n+2} folgt. Man unterscheide nun in der neuen Reihe 1) jedes Glied von der Form a_n, auf welches ein Glied von der Form ha_n folgt; 2) jedes Glied von der Form ha_n, auf welches ein Glied von der Form a_{n+2} folgt, und es seien respective

$$a_s, ha_u, a_v, ha_w, \text{ etc.} \ldots.$$

die verschiedenen Glieder beider Arten, geordnet nach der Größe der Indices, mit welchen der Buchstabe a behaftet ist. Die neue, aus Monomien bestehende Reihe,

(113) $\left\{\begin{array}{l} a_0, a_1, \ldots a_s, ha_s, ha_{s+1}, \ldots ha_u, a_{u+2}, \ldots a_v, \\ ha_v, ha_{v+1}, \ldots ha_w, a_{w+2}, a_{w+3}, \text{etc.} \ldots ha_m, \end{array}\right.$

wird offenbar nur Abwechselungen enthalten, welche sich in der Reihe (109) vorfinden, und außerdem diejenigen, welche aus dem Uebergange von ha_u auf a_{u+2}, von ha_w auf a_{w+2} etc... entstehen können. Uebrigens ist es leicht einzusehen, daß, wenn die beiden Größen

$$ha_u \text{ und } a_{u+2},$$

oder, was dasselbe ist,

$$a_u \text{ und } a_{u+2}$$

mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind, die correspondirende Abwechselung nur an die Stelle einer andern treten wird, welche in der Reihe (109) vorkommt, diejenige nämlich, welche zwischen den Gliedern a_{u+1} und einem der beiden Glieder a_u, a_{u+2} stattfand. Eine ähnliche Betrachtung läßt sich auch in dem Falle anstellen, wo die Größen ha_w, a_{w+2} mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind, etc.... Es läßt sich demnach annehmen, daß das Maximum der Abwechselungen nicht vermehrt wird, wenn man von der Reihe (109) zur Reihe (113), folglich zur Reihe (111) übergeht; was zu erweisen war.

Zusatz. Multiplicirt man das Polynom (110) mit mehreren Factoren von der Form

$$x + h,\ x + h',\ x + h'',\ \text{etc.}\ldots,$$

wo h, h', h''... positive Größen bedeuten, so wird das Maximum der Abwechselungen zwischen den Zeichen der successiven Coefficienten der absteigenden Potenzen von x nicht vermehrt werden.

Lehrsatz 7. Es sei für das Polynom

(110) $F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$

m' das Minimum der Folgen, und m'' das Minimum der Abwechselungen zwischen den successiven Coefficienten der absteigenden Potenzen von x, so ist in der Gleichung

(114) $$F(x) = 0$$

die Anzahl der negativen Wurzeln gleich oder kleiner als m'; die Anzahl der positiven Wurzeln gleich oder kleiner als m'', und die Anzahl der imaginären Wurzeln gleich oder größer als

$$m - (m' + m'').$$

Beweis. Um den ersten Theil dieses Lehrsatzes zu beweisen, bemerke ich, daß, wenn man die negativen Wurzeln der Gleichung (114) durch h, h', h''... bezeichnet, das Polynom $F(x)$ durch das Product

$$(x+h)(x+h')(x+h'')\ldots$$

theilbar seln muß. Der Quotient sei Q. Nach dem Zusatze des vorigen Lehrsatzes ist das Maximum der Abwechselungen in $F(x)$ gleich oder kleiner als das Maximum der Abwechselungen im Polynom Q, folglich gleich oder kleiner als der Grad des letzteren Polynoms. Es ist demnach das Minimum der Folgen in $F(x)$ gleich oder größer als die Differenz zwischen der Zahl m und dem Grade des Polynoms Q, d. h. gleich oder größer als die Anzahl der reellen und negativen Wurzeln von

$$(114) \qquad F(x) = 0.$$

Um den zweiten Theil des siebenten Lehrsatzes zu beweisen, braucht man nur in (114), $-x$ für x zu setzen, so werden die positiven Wurzeln zu negativen, und die Abwechselungen der Zeichen zu Folgen, und umgekehrt.

Da die Gleichung $F(x)$, wenn sie vom m^{ten} Grade ist, m reelle oder imaginäre Wurzeln haben muß, so ist es klar, daß der dritte Theil des Satzes eine bloße Folge der beiden anderen ist.

Zusatz. Um den vorstehenden Lehrsatz auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir die Gleichung

$$(115) \qquad x^m + 1 = 0$$

betrachten. — Man findet hier, 1) wenn m eine gerade Zahl ist,

$$m' = 0,\ m'' = 0;$$

2) wenn m eine ungerade Zahl ist,

$$m' = 1,\ m'' = 0.$$

Mithin hat die Gleichung (115) im ersten Falle gar keine reelle Wurzel und kann im zweiten Falle nur eine einzige negative haben.

Vierte Note.

Ueber die Entwickelung der alternirenden Function,

$$(y-x)\times(z-x)(z-y)\times\ldots\times(v-x)(v-y)(v-z)\ldots(v-u).$$

Wir wollen die besagte Function durch φ bezeichnen. Jedes Glied ihrer Entwickelung wird, abgesehen vom Zeichen (nach Cap. 3., §. 2.), dem Producte der irgendwie geordneten und respective auf die Potenzen (deren Exponenten

$$\pm\ 0, 1, 2, 3, \ldots n-1$$

sind) erhobenen Veränderlichen gleich sein.

Ferner ist leicht einzusehen, daß alle Producte dieser Art sich vermittelst einer oder mehrerer Versetzungen von je 2 Veränderlichen gegenseitig aus einander ableiten lassen. So z. B. kann man das Product

$$x^0 y^1 z^2 \ldots u^{n-2} v^{n-1}$$

aus irgend einem Producte von derselben Form ableiten, wenn man durch dergleichen Versetzungen erst x in die erste Stelle, sodann y in die zweite, dann z in dritte ꝛc. bringt. Da ferner φ das Zeichen verändert (ohne jedoch seinen Werth anderweitig zu ändern), so oft man zwei Veränderliche unter einander versetzt, so folgt: 1) daß die Entwickelung dieser Function alle oben erwähnten Producte enthält, theils mit dem Zeichen +, theils mit dem Zeichen —; 2) daß in dieser Entwickelung zwei willkürlich gewählte Producte entweder einerlei Zeichen oder entgegengesetzte Zeichen haben, je nachdem man sie durch eine gerade oder durch eine ungerade Anzahl von Versetzungen gegenseitig aus einander herleiten kann. Geht man von diesen Betrachtungen aus, so wird es leicht, folgenden Satz aufzustellen.

Lehrsatz 1. Verbindet man mit dem Producte

$$x_0 y^1 z^2 \ldots u^{n-2} v^{n-1}$$

alle diejenigen, welche man durch eine oder durch mehrere successive Versetzungen von je zweien der Veränderlichen

$$x, y, z, \ldots u, v$$

erhält, so ist die Anzahl aller dieser Producte

$$1.2.3 \ldots (n-1)n,$$

und sie zerfallen in zwei verschiedene Classen, dergestalt, daß man niemals zwei Producte derselben Classe anders als durch eine gerade Anzahl von Versetzungen, und ebenso niemals zwei Producte, welche nicht zu einer und derselben Classe gehören, anders (als) durch eine ungerade Anzahl von Versetzungen gegenseitig aus einander ableiten kann. Gibt man nun allen Producten der einen Classe das Zeichen +, allen Producten der andern Classe das Zeichen —, und addirt man sodann sämmtliche Glieder, so ist die Summe entweder $+\varphi$ oder $-\varphi$, je nachdem man den Gliedern der einen oder der anderen Classe das Zeichen + gegeben hat.

Zur Entwickelung der alternirenden Function $\pm\varphi$ reicht vorstehender Satz vollkommen hin; ob aber zwei beliebige, in der Entwickelung vorkommende Producte gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, darüber lehrt folgender Satz entscheiden, welchen wir jedoch mittheilen wollen, ohne ihn zu beweisen, da der Beweis ohne Mühe aus obigen Principien hergeleitet werden kann.

Lehrsatz 2. Um zu entscheiden: ob in der Entwickelung der alternirenden Function $\pm\varphi$ zwei Producte von der Form

$$x^0 y^1 z^2 \ldots u^{n-2} v^{n-1}$$

mit gleichen oder mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind, wird man die Veränderlichen in mehrere Gruppen vertheilen und diejenigen Veränderlichen immer in eine und dieselbe Gruppe bringen, welche in beiden Producten vertauschte Exponenten haben, dagegen wird man alle Veränderlichen, welche beim Uebergange von einem Producte zum anderen ihre Exponenten behalten, als eben so viele Gruppen betrachten. Ist nun die Differenz zwischen der Totalanzahl der Veränderlichen und der Anzahl der Gruppen eine gerade Zahl, so haben die Producte einerlei Zeichen; ist diese Diffe-

renz hingegen eine ungerade Zahl, so haben sie entgegengesetzte Zeichen.

Man erleichtert sich die Anwendung dieses Lehrsatzes, wenn man die beiden Producte unter einander setzt und in jedem die Veränderlichen nach der Größe ihrer Exponenten ordnet.

Um beide Lehrsätze auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir die Veränderlichen

$$x, y, z, u, v$$

betrachten. Das Product oder die alternirende Function

$$(y-x)(z-x)(z-y)(u-x)(u-y)(u-z)(v-x)(v-y)(v-z)(v-u)$$

wird, wenn es entwickelt wird, aus 120 Gliedern (oder eben so vielen Producten) bestehen, wovon 60 mit dem + Zeichen, und 60 mit dem — Zeichen behaftet sind. Eines von denjenigen Gliedern, welche das + Zeichen haben, wird dasjenige sein, dessen Factoren die ersten Buchstaben der Binomien

$$y-x, z-x, z-y, \ldots, v-u$$

sind, also

$$x^0 y^1 z^2 u^3 v^4.$$

Um nun zu erfahren, ob ein anderes Glied, etwa

$$x^0 z^1 v^2 u^3 y^4,$$

das + Zeichen oder das — Zeichen hat, braucht man nur zu bemerken, daß, wenn man beide Producte in Bezug auf die beim Uebergange von dem einen zu dem anderen vorzunehmenden Versetzungen betrachtet, man die Veränderlichen in drei Gruppen wird theilen müssen, von denen die eine nur x, die zweite y, z, v, und die dritte nur u enthalten wird. Zieht man die Anzahl der Gruppen, also 3, von der Anzahl der Veränderlichen, also von 5, ab, so erhält man 2, also eine gerade Zahl. Die beiden Producte werden demnach einerlei Zeichen haben, und da das erste das + Zeichen hat, so wird es das zweite gleichfalls haben müssen.

Fünfte Note.

Ueber die Interpolationsformel von Lagrange.

Will man eine ganze Function von x, und zwar vom n^{ten} Grade, aus einer gewissen Anzahl von besonderen Werthen, welche man als bekannt annimmt, bestimmen, so braucht man nur sich an Cap. 4., §. 1., Formel (1) zu erinnern. Diese Formel, welche von Lagrange herrührt, kann sehr leicht aus den in Cap. 3, §. 1. dargestellten Principien hergeleitet werden. Wir wollen zu diesem Zwecke durch

$$(1) \qquad u = a + bx + cx^2 + \ldots + hx^{n-1}$$

die gesuchte Function, und durch

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$$

die correspondirenden Werthe von

$$x_0, x_1, x_2 \ldots x_{n-1},$$

bezeichnen, wo $x_0, x_1 \ldots$ besondere Werthe von x sind; so werden die Unbekannten, welche in dieser Aufgabe vorkommen, die Coefficienten a, b, c ... h sein, und man hat zur Bestimmung derselben die Bedingungsgleichungen

$$(2) \begin{cases} u_0 = a + bx_0 + cx_0^2 + \ldots + hx_0^{n-1}, \\ u_1 = a + bx_1 + cx_1^2 + \ldots + hx_1^{n-1}, \\ u_2 = a + bx_2 + cx_2^2 + \ldots + hx_2^{n-1}, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \\ u_{n-1} = a + bx_{n-1} + cx_{n-1}^2 + \ldots + hx_{n-1}^{n-1} \end{cases}$$

Um nun den entwickelten Werth von u zu erhalten, kommt es einzig und allein darauf an: die Coefficienten a, b, c ... h aus (1) und (2) zu eliminiren. Man erreicht diesen Zweck, wenn man die Gleichungen (2) mit vorläufig unbestimmt bleibenden

Factoren multiplicirt, dann diese transformirten Gleichungen zu (1) addirt und endlich für die eingeführten unbestimmten Factoren solche Werthe setzt, daß die Summe aller zweiten Theile Null wird. Jene Factoren seien

$$-X_0,\ -X_1,\ -X_2,\ \ldots,\ -X_{n-1},$$

so ist

$$u - X_0 u_0 - X_1 u_1 - X_2 u_2 - \ldots - X_{n-1} u_{n-1}$$
$$= (1 - X_0 - X_1 - X_2 - \ldots - X_{n-1})\,a$$
$$+ (x - x_0 X_0 - x_1 X_1 - x_2 X_2 - \ldots - x_{n-1} X_{n-1})\,b$$
$$+ (x^2 - x_0^2 X_0 - x_1^2 X_1 - x_2^2 X_2 - \ldots - x_{n-1}^2 X_{n-1})\,c$$
$$+ \text{etc.} \ldots\ldots$$
$$+ (x^{n-1} - x_0^{n-1} X_0 - x_1^{n-1} X_1 - x_2^{n-1} X_2 - \ldots - x_{n-1}^{n-1} X_{n-1})\,h,$$

mithin

$$(3)\quad u = X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 + \ldots + X_{n-1} u_{n-1},$$

wenn nur die Größen

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ \ldots X_{n-1}$$

den Bedingungsgleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} = 1, \\ x_0 X_0 + x_1 X_1 + x_2 X_2 + \ldots + x_{n-1} X_{n-1} = x, \\ x_0^2 X_0 + x_1^2 X_1 + x_2^2 X_2 + \ldots + x_{n-1}^2 X_{n-1} = x^2, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \\ x_0^{n-1} X_0 + x_1^{n-1} X_1 + x_2^{n-1} X_2 + \ldots + x_{n-1}^{n-1} \cdot X_{n-1} = x^{n-1} \end{cases}$$

Genüge leisten.

Löst man diese Gleichungen nach der in Cap. 3, §. 1. vorgetragenen Methode auf, so erhält man die Formeln

$$(5)\quad \begin{cases} X_0 = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_{n-1})}, \\ X_1 = \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_{n-1})} \\ \text{etc.} \ldots\ldots \\ X_{n-1} = \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1)\ldots(x_{n-1} - x_{n-2})}, \end{cases}$$

und so verwandelt sich (3) in die Formel von Lagrange.

Uebrigens ist die Formel von Lagrange in einer viel allgemeineren mitbegriffen, zu welcher man gelangt, wenn man aus einer gewissen Anzahl von gegebenen Werthen nicht eine ganze, sondern nur eine rationale Function von x herzuleiten

sucht. Gesetzt z. B. diese rationale Function solle von der Form

$$(6)\quad u = \frac{a + bx + cx^2 + \ldots + hx^{n-1}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \theta x^m}$$

sein, so sind die Unbekannten in der Aufgabe die Coefficienten

$$a, b, c, \ldots . h, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta,$$

oder besser die Quotienten

$$\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}, \frac{c}{\alpha}, \ldots \frac{h}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \ldots \frac{\theta}{\alpha},$$

deren Anzahl $n + m$ ist. Es folgt hieraus, daß u vollkommen bestimmt ist, wenn man $n + m$ besondere Werthe der Function

$$(7)\qquad u_0, u_1, u_2, \ldots . u_{n+m-1}$$

kennt, welche den $n + m$ Werthen

$$(8)\qquad x_0, x_1, x_2, \ldots ., x_{n+m-1}$$

correspondiren. Von der Richtigkeit dieser Betrachtungen kann man sich noch mehr überzeugen, da sich beweisen läßt, daß eine zweite rationale Function von der Form

$$(9)\qquad \frac{a' + b'x + c'x^2 + \ldots + h'x^{n-1}}{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \ldots + \theta' x^m},$$

welche denselben Bedingungen entspricht, nothwendig identisch mit der erstern sein muß. Denn gesetzt, die Brüche (6) und (9) werden für die in der Reihe (8) enthaltenen besonderen Werthe von x einander gleich, so muß die Gleichung

$$(10)\quad \begin{cases} (a + bx + cx^2 + \ldots + hx^{n-1})(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \ldots + \theta' x^m) \\ -(a' + b'x + c'x^2 + \ldots + h'x^{n-1})(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots \\ \ldots + \theta x^m) = 0, \end{cases}$$

da sie für $n + m$ Werthe von x gilt, während ihr Grad niedriger als $n + m$ ist, nothwendigerweise identisch sein, woraus denn folgt: daß auch

$$(11)\quad \frac{a + bx + cx^2 + \ldots + hx^{n-1}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \theta x^m} = \frac{a' + b'x + c'x^2 + \ldots + h'x^{n-1}}{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \ldots + \theta' x^m}$$

eine identische Gleichung sein muß. Die vorgelegte Aufgabe läßt demnach nur eine Auflösung zu. Man wird sie aber in der That auflösen, wenn man den Bruch

$$u_0 u_1 \ldots u_m \frac{(x - x_{m+1})(x - x_{m+2}) \ldots (x - x_{m+n-1})}{(x_0 - x_{m+1}) \ldots (x_0 - x_{m+n-1}) \times \cdots \times (x_m - x_{m+1}) \ldots (x_m - x_{m+n-1})} + \text{etc.} \ldots$$

$$\overline{u_0 u_1 \ldots u_{m-1} \frac{(x_0 - x)(x_1 - x) \ldots (x_{m-1} - x)}{(x_0 - x_m) \ldots (x_0 - x_{m+n-1}) \times \cdots \times (x_{m-1} - x_m) \ldots (x_{m-1} - x_{m+n-1})} + \text{etc.} \ldots}$$

für dessen Nenner 1 gesetzt werden muß, wenn $m = 0$ ist, dessen Zähler hingegen dem Producte $u_0 u_1 \ldots u_m$ gleich sein muß, wenn $n = 1$ ist, als allgemeinen Werth von u annimmt. So z. B. findet man für $m = 0$

$$(12) \quad u = u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})} + \text{etc.}\ldots;$$

für $m = 1$

$$(13) \quad u = \frac{u_0 u_1 \dfrac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_n)\times(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} + \text{etc.}\ldots}{u_0 \dfrac{x_0-x}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + u_1 \dfrac{x_1-x}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \text{etc.};}$$

für $n = 1$

$$(14) \quad u = \frac{u_0 u_1 \ldots u_m}{u_0 u_1 \ldots u_{m-1} \cdot \dfrac{(x_0-x)(x_1-x)\ldots(x_{m-1}-x)}{(x_0-x_m)(x_1-x_m)\ldots(x_{m-1}-x_m)} + \text{etc.}\ldots}$$

In jeder dieser Formeln wird man ohne Mühe den Zähler und den Nenner von u ergänzen können, indem man zu dem ersten Gliede jedes Zählers oder Nenners alle Glieder hinzufügt, welche man durch ein oder mehrere Vertauschungen der Indices erhält. Setzt man z. B. $m = 1$, und $n = 2$, so findet man den vollkommen entwickelten Werth von u

$$(15) \quad u = \frac{u_0 u_1 \dfrac{x-x_2}{(x_0-x_2)(x_1-x_2)} + u_0 u_2 \dfrac{x-x_1}{(x_0-x_1)(x_2-x_1)} + u_1 u_2 \dfrac{x-x_0}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}}{u_0 \dfrac{x_0-x}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + u_1 \dfrac{x_1-x}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + u_2 \dfrac{x_2-x}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}.$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Formel (12) die des Lagrange ist, und daß man aus ihr die Formel (14) dadurch herleiten kann, daß man m an die Stelle von $n-1$, und $\frac{1}{u}$ an die Stelle von u setzt.

Sechste Note.

Von den figurirten Zahlen.

Figurirte Zahlen von der ersten, zweiten, dritten Ordnung etc...., nennt man diejenigen Zahlen, welche die Coefficienten der auf einander folgenden Potenzen von x in der Entwickelung der Ausdrücke

$$(1+x)^{-2}, (1+x)^{-3}, (1+x)^{-4}, \text{ etc....}$$

bilden. Diese Erklärung gibt uns ein Mittel an die Hand, sie zu berechnen. Es ist (Cap. 6, §. 4.) gezeigt worden, daß für beliebige reelle Werthe von μ und für Zahlenw. $x<1$

$$(1) \qquad (1+x)^{\mu} = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n+\text{etc...}$$

ist. Setzt man in Gleich. (1), $\mu = -(m+1)$, wo m eine beliebige Zahl bedeutet, so findet man

$$(2) \qquad (1+x)^{-m-1} = 1-\frac{(m+1)}{1}x+\frac{(m+1)(m+2)}{1.2}x^2-\ldots\mp\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{1.2.3..n}x^n$$
$$\mp \text{etc.....}$$

Da nun aber offenbar

$$(3) \quad \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{1.2.3..,n} = \frac{1.2.3\ldots m(m+1)\ldots(m+n)}{(1.2.3\ldots m).(1.2.3\ldots n)} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots m}$$

ist, so kann die Gleichung (2) auch folgendergestalt geschrieben werden:

$$(4) \qquad (1+x)^{-m-1} = \frac{1.2.3...m}{1.2.3...m} - \frac{2.3.4...(m+1)}{1.2.3...m}x + \frac{3.4.5...(m+2)}{1.2.3...m}x^2 - \text{etc.} \ldots$$

$$\mp \frac{n(n+1)...(n+m-1)}{1.2.3...m}x^{n-1} \pm \frac{(n+1)(n+2)...(n+m)}{1.2.3...m}x^n \mp \text{etc..}$$

Die Zahlencoefficienten der succeſſiven Potenzen von x im zweiten Theile der letzten Formel, alſo

$$(5) \quad \frac{1.2.3...m}{1.2.3...m}, \frac{2.3.4...(m+1)}{1.2.3...m}, \ldots, \frac{n(n+1)...(n+m-1)}{1.2.3...m}, \text{etc.},$$

werden genau die figurirten Zahlen von der m^{ten} Ordnung ausdrücken. Die Reihe (5) erſtreckt ſich ins Unendliche. Ihr n^{tes} Glied, d. h. der Bruch

$$\frac{n(n+1)...(n+m-1)}{1.2.3...m},$$

iſt zugleich der Zahlencoefficient von x^{n-1} in der Entwickelung von $(1+x)^{-m-1}$ und der Coefficient von x^m in der Entwickelung von $(1+x)^{n+m-1}$. Setzt man ferner in (5) ſucceſſive

$$m = 1,\ m = 2,\ m = 3,\ \text{etc.}\ldots,$$

ſo erhält man: 1) die Reihe der natürlichen Zahlen oder die figurirten Zahlen der erſten Ordnung

$$1, 2, 3, 4, \ldots n, \text{etc.}\ldots;$$

2) die Reihe der Triangularzahlen oder die figurirten Zahlen der zweiten Ordnung

$$1, 3, 6, 10, \ldots \frac{n(n+1)}{1.2}, \text{etc}\ldots;$$

3) die Reihe der ſogenannten Pyramidalzahlen oder die figurirten Zahlen der dritten Ordnung

$$1, 4, 10, 20, \ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}, \text{etc.}\ldots$$

Schreibt man dieſe verſchiedenen Reihen unter einander, über dieſelben aber eine Reihe, deren Glieder lauter Einheiten ſind, und ſetzt man bei einer jeden von dieſen Reihen das erſte Glied unter das zweite der nächſtvorhergehenden Reihe, ſo erhält man folgendes Schema:

(6)
$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \text{etc.}\ldots, \\ & 1, & 2, & 3, & 4, & \text{etc.}\ldots, \\ & & 1, & 3, & 6, & \text{etc.}\ldots, \\ & & & 1, & 4, & \text{etc.}\ldots, \\ & & & & 1, & \text{etc.}\ldots, \\ & & & & & \text{etc.}\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Die in der $\overline{n+1}^{ten}$ Verticalcolumne dieses Täfelchens enthaltenen Zahlen sind die Coefficienten der n^{ten} Potenz eines Binoms. Pascal hat in seinem „Traité du Triangle arithmétique" zuerst das Gesetz für diese Zahlen gefunden. Newton zeigte in der Folge, daß die nach diesem Gesetze entwickelte Formel auch auf gebrochene und negative Potenzen ausgedehnt werden kann.

Verschiedene bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten der figurirten Zahlen lassen sich unmittelbar aus Cap. 4., §. 3, Form. (4) herleiten. Angenommen z. B., man habe in dieser Formel $n-1$ an die Stelle von n gesetzt und setze alsdann

$$x = m+1,\ y = m'+1,$$

wo m, m' beliebige ganze Zahlen sind, so wird man finden

$$(7)\quad \frac{(m+m'+2)(m+m'+3)\ldots(m+m'+n)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-2)} \cdot \frac{m'+1}{1}$$

$$+ \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m+1}{1} \cdot \frac{(m'+1)(m'+2)\ldots(m'+n-2)}{1.2.3\ldots(n-2)} + \frac{(m'+1)(m'+2)\ldots(m'+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

und wenn man hierauf $m' = 0$ setzt:

$$(8)\quad \frac{(m+2)(m+3)\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-2)}$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{m+1}{1} + 1.$$

Setzt man in Cap. 4, §. 3., Form. (4) $n-1$ für n, und

$$x = m+1,\ y = -(m'+1),$$

so erhält man

$$(9)\quad \frac{(m-m')(m-m'+1)\ldots(m-m'+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$= \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} - \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-2)} \cdot \frac{m'+1}{1}$$
$$+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mp \frac{m+1}{1} \cdot \frac{(m'+1)m'\ldots(m'-n+4)}{1.2.3\ldots(n-1)} \pm \frac{(m'+1)m'\ldots(m'-n+3)}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $m' =$ oder $> m$, und zugleich $n =$ oder $> m'+2$, so findet man

$$(10)\quad 0 = \frac{(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} - \frac{m'+1}{1} \cdot \frac{(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-2)}$$
$$+ \frac{(m'+1)m'}{1.2} \cdot \frac{(m+1)\ldots(m+n-3)}{1.2.3\ldots(n-3)} - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mp \frac{(m'+1)}{1} \cdot \frac{(m+1)\ldots(m+n-m'-1)}{1.2.3\ldots(n-m'-1)} \pm \frac{(m+1)\ldots(m+n-m'-2)}{1.2.3\ldots(n-m'-2)}.$$

Da die Gleichungen (8) und (10) auch folgendergestalt geschrieben werden können:

$$(11)\quad \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m} + \frac{1.2.3\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m} + \ldots + \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}$$
$$= \frac{n(n+1)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots(m+1)},$$

$$(12)\quad 0 = \frac{n\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m} - \frac{(m'+1)}{1} \cdot \frac{(n-1)\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots m} + \text{etc.}\ldots$$
$$\mp \frac{m'+1}{1} \cdot \frac{(n-m')\ldots(n+m-m'-1)}{1.2.3\ldots m} \pm \frac{(n-m'-1)\ldots(n+m-m'-2)}{1.2.3\ldots m},$$

so ergeben sich aus ihnen offenbar folgende zwei Lehrsätze.

Lehrsatz 1. Entwickelt man die Reihe der figurirten Zahlen von der m^{ten} Ordnung, und addirt man die ersten n Glieder dieser Reihe, so ist die Summe der n^{ten} figurirten Zahl von der Ordnung $m+1$ gleich.

Lehrsatz 2. Sind m und m′ zwei der Bedingung

$$m' = \text{oder} > m$$

unterworfene ganze Zahlen, und setzt man in der Entwickelung von $(1-x)^{m'+1}$ statt der auf einander folgenden Potenzen von x $m'+2$ auf einander

folgende Glieder aus der Reihe der figurirten Zahlen von der Ordnung m, so ist das Resultat gleich Null.

Zusatz 1. Wenn die Glieder der Reihe

(13) $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, etc. $\ldots$

successive die natürlichen Zahlen, die Triangularzahlen und die Pyramidalzahlen bedeuten, so findet man im ersten Falle z. B.

(14) $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$,

im zweiten

(15) $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0$,

und im dritten

(16) $a_n - 4a_{n-1} + 6a_{n-2} - 4a_{n-3} + a_{n-4} = 0$.

Die erste dieser Gleichungen fällt mit der Formel (3) in Cap. 12., §. 1. zusammen.

Zusatz 2. Bezeichnet man durch

(13) $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, etc. $\ldots$

allgemein die figurirten Zahlen von der m^{ten} Ordnung, so ist

(17) $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots a_n x^n$, etc. $\ldots$

eine recurrirende Reihe, deren Beziehungsscale durch die Größen

(18) $1, -\frac{m+1}{1}, +\frac{(m+1)m}{1.2}, -\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}$, + etc...

d. h. durch die Coefficienten der auf einander folgenden Potenzen von x in der Entwickelung von $(1-x)^{m+1}$ gebildet wird. So ist z. B. die Reihe

$$1, 3x, 6x^2, 10x^3, \text{etc.}\ldots,$$

in welcher die Triangularzahlen die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x bilden, recurrent, und ihre Beziehungsscale wird durch die Größen

$$1, -3, +3, -1$$

gebildet.

Unter den vorzüglichsten Eigenschaften der figurirten Zahlen verdienen diejenigen noch herausgehoben zu werden, welche sich aus den Gleichungen (7) und (9) ergeben, wenn man denselben folgende Form gibt:

$$(19) \quad \frac{n(n+1)\ldots(n+m+m')}{1.2.3\ldots(m+m'+1)} = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m} \cdot \frac{1.2.3\ldots m'}{1.2.3\ldots m'}$$

$$+\frac{(n-1)n\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots m}\cdot\frac{2.3.4\ldots(m'+1)}{1.2.3\ldots m'}$$

$$+\text{ etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m}\cdot\frac{n(n+1)\ldots(n+m'-1)}{1.2.3\ldots m'};$$

$$(20)\qquad \frac{n(n+1)\ldots(n+m-m'-2)}{1.2.3\ldots(m-m'-1)}$$

$$=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}-\frac{(m'+1)}{1}\cdot\frac{(n-1)n\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots m}$$

$$+\text{ etc.}\ldots\ldots$$

$$\mp\frac{(m'+1)\ldots(m'-n+4)}{1.2.3\ldots(n-2)}\cdot\frac{2.3.4\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m}$$

$$\pm\frac{(m'+1)\ldots(m'-n+3)}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m}.$$

Wir bemerken noch, daß in der Reihe der figurirten Zahlen von der Ordnung n, das $\overline{n+1}^{te}$ Glied der Summe der Quadrate der Coefficienten gleich ist, welche in der n^{ten} Potenz eines Binoms vorkommen. In der That findet man, wenn man in Cap. 4., §. 3., Formel (2), $x=n$, $y=n$ setzt,

$$(21)\qquad \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)n}$$

$$=1+\left(\frac{n}{1}\right)^2+\left(\frac{n.n-1}{1.2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n.n-1}{1.2}\right)^2+\left(\frac{n}{1}\right)^2+1.$$

Siebente Note.

Von den doppelten Reihen.

Es seien

$$(1)\begin{cases} u_0, & u_1, & u_2, & \text{etc.}, \\ u'_0, & u'_1, & u'_2, & \text{etc.}, \\ u''_0, & u''_1, & u''_2, & \text{etc.}, \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

irgend welche in horizontalen und verticalen Reihen neben und unter einander gesetzte Größen, und zwar enthalte jede Horizontalreihe sowohl, als auch jede Verticalreihe unendlich viele Glieder, so kann man das durch alle diese Glieder gebildete System eine doppelte Reihe nennen, und diese Größen selbst werden alsdann die Glieder dieser Reihe sein, deren allgemeines Glied

$$u_n^{(m)}$$

sein wird, wo n, m zwei beliebige ganze Zahlen bedeuten. Wir wollen nun durch

$$s_n^{(m)}$$

die Summe derjenigen Glieder der Reihe 1 bezeichnen, welche in folgendem Schema enthalten sind:

$$(2)\begin{cases} u_0, & u_1, & u_2, \ldots u_{n-1}, \\ u'_0, & u'_0, & u'_2, \ldots u'_{n-1}, \\ u''_0, & u''_1, & u''_2, \ldots u''_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_0^{(m-1)}, & u_1^{(m-1)}, & u_2^{(m-1)} \ldots u_{n-1}^{(m-1)}, \end{cases}$$

d. h. die Summe derjenigen Glieder, welche einen Index, kleiner als n, und einen zweiten Index, welcher kleiner als m ist, haben. Wenn die Summe der übrigen Glieder, in welcher

Ordnung und Anzahl man dieselben immer nehmen mag, für unendlich große Werthe von m und n unendlich klein wird, so ist es klar, daß die Summe $s_n^{(m)}$, und alle diejenigen, welche man daraus herleiten kann, indem man zu $s_n^{(m)}$ einige von den im Täfelchen (2) nicht vorkommenden Gliedern addirt, sich einer bestimmten Grenze s nähern wird, wenn m und n beständig zunehmen. In diesem Falle wird die Reihe (1) convergiren, und die Grenze s wird ihre Summe sein. Im entgegengesetzten Falle wird die Reihe (1) divergiren und keine Summe haben.

Wenn die Summe von beliebig vielen der im Täfelchen (2) nicht vorkommenden Glieder für unendlich große Werthe von m und n unendlich klein ist, so gilt dies um so mehr von denjenigen unter diesen Gliedern, welche zu einer oder zu mehreren Horizontal- oder Verticalreihen im Täfelchen (1) gehören; und hieraus folgt unmittelbar, daß, wenn die in diesem Täfelchen enthaltene doppelte Reihe convergirt, dies auch bei den einzelnen Horizontal- und Verticalreihen der Fall sein muß. Wir wollen daher das Resultat, welches man erhält, wenn man die Summen der ersten m Horizontalreihen von (1) addirt, d. h. die ersten m Glieder der einfachen Reihe

$$(3)\quad \left.\begin{array}{l} u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc.},\ u'_0 + u'_1 + u'_2 + \text{etc.},\\ u''_0 + u''_1 + u''_2 + \text{etc.},\\ \text{etc.}\ldots\ldots, \end{array}\right\}$$

durch

$$s^{(m)}$$

bezeichnen; das Resultat hingegen, welches man erhält, wenn man die Summen der ersten n Verticalreihen addirt, d. h. die ersten n Glieder der einfachen Reihe

$$(4)\quad \begin{array}{l} u_0 + u'_0 + u''_0 + \text{etc.},\ u_1 + u'_1 + u''_1 + \text{etc.},\\ u_2 + u'_2 + u''_2 + \text{etc.},\\ \text{etc.}\ldots\ldots, \end{array}$$

durch

$$s_n,$$

so ist offenbar $s^{(m)}$ die Grenze des Ausdrucks $s_n^{(m)}$ für beständig zunehmende Werthe von n, und s_n die Grenze desselben Ausdrucks für beständig zunehmende Werthe von m. Mithin darf man nur m in $s^{(m)}$, und n in s_n beständig zunehmen lassen, so nähern sich $s^{(m)}$ und s_n der Grenze s. Hieraus ergibt sich folgender Satz.

Lehrsatz 1. Die doppelte Reihe (1) sei convergirend, und ihre Summe sei s, so convergiren die Reihen (3) und (4) gleichfalls, und die Summe einer jeden von ihnen ist s.

Die Zahlenwerthe der in (1) vorkommenden Größen seien respective

$$(5)\quad \begin{cases} \varrho_0, \varrho_1, \varrho^2, \text{ etc.}, \\ \varrho'_0, \varrho'_1, \varrho'_2, \text{ etc.}, \\ \varrho''_0, \varrho''_1, \varrho''_2, \text{ etc.}, \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Wenn man eine beliebige Anzahl von denjenigen Gliedern von (1), welche nicht in (2) vorkommen, addirt, so ist die Summe offenbar kleiner oder höchstens gleich (abgesehen vom Zeichen) der Summe der correspondirenden Glieder von (5). Wenn daher diese letztere Summe für unendlich große Werthe von m und n unendlich klein ist, so muß dies um so mehr bei der ersteren der Fall sein. Wenn also die doppelte Reihe (5) convergirt, so ist dies auch bei (1) der Fall. Ich bemerke noch, daß man sich von der Convergenz der doppelten Reihe (5) vollkommen überzeugt halten kann, wenn 1) die Horizontalreihen von (1) convergiren, und wenn 2) auch ihre Summen, d. h.

$$(6)\quad \begin{cases} \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \text{etc.}, \ \varrho'_0 + \varrho'_1 + \varrho'_2 + \text{etc.}, \\ \varrho''_0 + \varrho''_1 + \varrho''_2 + \text{etc.}, \\ \text{etc.} \ldots\ldots \end{cases}$$

eine convergirende einfache Reihe bilden. Denn es sei ε eine beliebig kleine Zahl, so kann man m immer so groß annehmen, daß die Addition der Summen

$$\varrho_0^{(m)} + \varrho_1^{(m)} + \varrho_2^{(m)} + \text{etc.}, \ \varrho_0^{(m+1)} + \varrho_1^{(m+1)} + \varrho_2^{(m+1)} + \text{etc.},$$
$$\text{etc.} \ldots\ldots,$$

mithin auch die der Glieder von (5), welche mit einem Index behaftet sind, der größer oder höchstens gleich m ist, niemals ein Resultat liefert, welches größer als $\frac{1}{2}\varepsilon$ wäre. Ist ferner die Zahl m auf diese Weise bestimmt, so kann man auch, da jede Horizontalreihe in (5) convergirt, n so groß annehmen, daß eine jede der Summen

$$\varrho_n + \varrho_{n+1} + \varrho_{n+2} + \text{etc.},$$
$$\varrho'_n + \varrho'_{n+1} + \varrho'_{n+2} + \text{etc.},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varrho_n^{(m-1)} + \varrho_{n+1}^{(m-1)}\varrho + {}_{n+2}^{(m-1)} + \text{etc.}$$

gleich oder kleiner als $\frac{1}{2m}\varepsilon$ ist, in welchem Falle man bei der Addition derjenigen Glieder von (5), deren oberer Index kleiner als m ist, während ihr unterer Index wenigstens gleich n ist, ein Resultat erhält, welches nie größer als $\frac{1}{2}\varepsilon$ ist. Wird den beiden eben angegebenen Bedingungen Genüge geleistet, so ist es klar, daß die Summe der Glieder von (5), deren oberer Index größer als m oder höchstens gleich m, und deren unterer Index wenigstens gleich n ist, höchstens gleich ε sein kann. Diese Summe wird also unendlich klein werden, wenn m und n unendlich groß sind, da in diesem Falle ε kleiner als jede anzugebende Größe sein kann. Die Reihe (5) ist also im angenommenen Falle convergirend, und die Reihe (1) muß es gleichfalls sein. Verbindet man dieses Princip mit dem ersten Lehrsatze, so erhält man folgenden Satz.

Lehrsatz 2. Sind alle Horizontalreihen von (1) convergirend, und bilden auch ihre Summen, oder

$$(3)\quad u_0+u_1+u_2+\text{etc.},\ u'_0+u'_1+u'_2+\text{etc.},\ u''_0+u''_1+u''_2+\text{etc.},\ \text{etc.}\ldots\ldots$$

eine convergirende Reihe; gilt ferner dies alles auch dann noch, wenn man an die Stelle eines jeden Gliedes von (1) dessen Zahlenwerth setzt, so sind 1) auch alle Verticalreihen convergirende Reihen; 2) ihre Summen

$$(4)\quad u_0+u'_0+u''_0+\text{etc.},\ u_1+u'_1+u''_1+\text{etc.},\ u_2+u'_2+u''_2+\text{etc.},\ \text{etc.}\ldots\ldots$$

bilden gleichfalls eine convergirende Reihe; 3) die Summe der Reihe (3) ist der von (4) gleich.

Zusatz 1. Vorstehender Lehrsatz gilt selbst dann, wenn einige Horizontal- oder Verticalreihen aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen. Denn jede Reihe dieser Art kann als eine unendliche Reihe angesehen werden, in welcher aber alle Glieder, deren Stelle eine gewisse Zahl übersteigt, verschwinden.

Zusatz 2. Es seien

$$(7)\quad \begin{cases} u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \text{etc.}\ldots, \\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ \text{etc.}\ldots, \end{cases}$$

zwei convergirende Reihen, deren respective Summen s und s′ sein mögen, und welche auch dann selbst noch convergiren, wenn man ihre Glieder auf deren Zahlenwerthe reducirt. Bildet man nun das Schema

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{llllll} u_0v_0, & u_1v_0, & u_2v_0, & u_3v_0, & \text{etc.}, \\ & u_0v_1, & u_1v_1, & u_2v_1, & \text{etc.}, \\ & & u_0v_2, & u_1v_2, & \text{etc.}, \\ & & & u_0v_3, & \text{etc.}, \\ & & & & \text{etc.}, \end{array}\right.$$

so sieht man leicht ein, daß die Horizontalreihen dieses Schema's die im zweiten Lehrsatze angegebenen Eigenschaften haben, und daß ihre respectiven Summen

$$(9)\qquad v_0s,\ v_1s,\ v_2s,\ v_3s,\ \text{etc.}\ldots$$

sind. Folglich bilden, nach Lehrs. 2. und Zus., die Summen der Verticalreihen, also

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} u_0v_0,\ u_0v_1+u_1v_0,\ u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0,\ldots. \\ u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_{n-1}v_1+u_nv_0,\ \text{etc.}\ldots. \end{array}\right.$$

gleichfalls eine convergirende Reihe, und die Summe dieser Reihe ist der Reihe (9), d. h. dem Producte ss' gleich. Die Betrachtung der doppelten Reihen führt uns also auf Cap. 6., §. 3., Lehrs. 6. zurück.

Zusatz 3. Ist x der Sinus eines zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogens, und z dessen Tangente, so findet man

$$z = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Da nun nach Cap. 9., §. 2., Form. 39. für Zahlenw. $z<1$

$$\text{arc. tang. } z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \text{etc.}\ldots$$

ist, so erhält man für Zahlenw. $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{arc. sin. } x = \text{arc. tang. } x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x^3}{3}\cdot(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{x^5}{5}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{x^7}{7}(1-x^2)^{-\frac{7}{2}} + \text{etc.}\ldots,$$

oder, was daſſelbe iſt,

$$\text{arc. sin. } x = x + \frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{etc.}\ldots.$$

$$\left.\begin{aligned} &- \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{5.7}{2.4}\cdot\frac{x^7}{7} - \text{etc.}\ldots. \\ &+ \frac{x^5}{5} + \frac{7}{2}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{etc.}\ldots. \\ &- \frac{x^7}{7} - \text{etc.}\ldots. \\ &+ \text{etc.}\ldots. \end{aligned}\right\} = \frac{1}{+}$$

Da die Horizontalreihen, welche den zweiten Theil dieſer Gleichung bilden, offenbar den im zweiten Lehrſatze angegebenen Bedingungen Genüge leiſten, ſo lange Zahlenw. $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ iſt, ſo folgt, daß dieſe Gleichung auch folgendergeſtalt geſchrieben werden kann:

$$\text{arc. sin. } x = x + \left(\frac{3}{2} - 1\right)\frac{x^3}{3} + \left(\frac{5.3}{2.4} - \frac{5}{2} + 1\right)\frac{x^5}{5}$$

$$+ \left(\frac{7.5.3}{2.4.6} - \frac{7.5}{2.4} + \frac{7}{2} - 1\right)\frac{x^7}{7} + \text{etc.}\ldots. \quad \left\{\begin{aligned} x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x &= +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\}.$$

Setzt man ferner in Cap. 4., §. 3., Form. 5., $y = -2$, während man für x einen von den poſitiven Werthen 3, 5, 7, etc.... ſetzt, ſo erhält man ſucceſſive

$$(11)\left\{\begin{aligned} &\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}, \\ &\frac{3.5}{2.4} - \frac{5}{2} + 1 = \frac{1.3}{2.4}, \\ &\frac{7.5.3}{2.4.6} - \frac{7.5}{2.4} + \frac{7}{2} - 1 = \frac{1.3.5}{2.4.6}, \\ &\text{etc.}\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

mithin findet man

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{arc. sin. } x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} \\ \quad + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\}.$$

Mit Hülfe des Infinitesimalcalculs läßt sich leicht beweisen, daß diese Gleichung nicht allein zwischen den Grenzen $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = +\frac{1}{\sqrt{2}}$, sondern auch zwischen den Grenzen $x = -1$, $x = +1$ gilt.

Zusatz 4. Nach Cap. 6., §. 4., Form. (20) ist für alle zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegende Werthe von x

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x - \frac{x^2}{2}(1-\mu) + \frac{x^3}{3}(1-\mu)(1-\frac{1}{2}\mu) - \text{etc.},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{1} \\ -\left(\frac{x^2}{2} + \mu\frac{x^2}{2}\right) \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{x^3}{3} - \mu\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} + \mu^2\left(\frac{1}{1.2}\right)\frac{x^3}{3}$$

$$- \frac{x^4}{4} + \mu\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} - \mu^2\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.3}\right)\frac{x^4}{4}$$

$$+ \mu^3\left(\frac{1}{1.2.3}\right)\frac{x^4}{4}$$

$$+ \text{etc.} \ldots\ldots$$

Da die Horizontalreihen, welche der zweite Theil dieser Gleichung enthält, den im zweiten Lehrsatze angegebenen Bedingungen Genüge leisten, wenn Zahlenw. $x < 1$ ist, so folgt, daß die Gleichung auch folgendergestalt geschrieben werden kann:

$$(13)\quad \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu}$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \mu\left[\frac{x^2}{2} - \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} - \text{etc.}\ldots\right]$$

$$+ \mu^2\left[\frac{1}{1.2}\cdot\frac{x^3}{3} - \left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.3}\right)\frac{x^4}{4} + \text{etc.}\ldots\right]$$

$$+ \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{matrix} x = -1 \\ x = +1 \end{matrix}\right\}.$$

Aber in Cap. 6., §. 4., Aufg. 1., Zuſ. 2. fanden wir bereits

$$(14)\quad \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = l(1+x) + \frac{\mu}{2}[l(1+x)]^2 + \text{etc.}\ldots$$

Da nun die Formeln (13) und (14) mit einander übereinſtimmen müſſen (ſiehe Cap. 6., §. 4., Lehrſ. 6.), ſo folgt, daß für alle zwiſchen den Grenzen -1 und $+1$ liegende Werthe von x

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{2}[l(1+x)]^2 = \frac{x^2}{2} - \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4}$$

$$- \ldots \pm \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{n-1}\right)\frac{x^n}{n} \mp \text{etc.},$$

$$\frac{1}{2.3}[l(1+x)]^3 = \left(\frac{1}{1.2}\right)\frac{x^3}{3} - \left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.3}\right)\frac{x^4}{4} + \text{etc.},$$

etc. . . . . .

ſein muß. — Wir haben bisher nur ſolche doppelte Reihen betrachtet, deren Glieder reelle Größen ſind. Was aber von dieſen gilt, läßt ſich auch auf den Fall ausdehnen, wo ihre Glieder imaginär werden, wenn man nur für Größe, imaginärer Ausdruck und für Zahlenwerth überall Modulus ſchreibt.

Unter dieſen Modificationen gelten die Lehrſätze 1. und 2. auch alsdann noch, wie leicht bewieſen werden kann, wenn man ſich auf folgendes Princip ſtützt.

Der Modulus der Summe mehrerer imaginären Ausdrücke ist immer kleiner als die Summe ihrer Moduli.

Um dies zu beweisen, darf man nur bemerken, daß, wenn man

$$\varrho(\cos.\theta + i\sin.\theta) + \varrho'(\cos.\theta' + i\sin.\theta') + \ldots$$
$$= R(\cos.T + i\sin.T)$$

setzt, wo ϱ, $\varrho' \ldots R$ positive Größen bedeuten, auch

$$R^2 = (\varrho\cos.\theta + \varrho'\cos.\theta' + \ldots)^2 + (\varrho\sin.\theta + \varrho'\sin.\theta' \ldots)^2$$
$$= \varrho^2 + \varrho'^2 + \ldots + 2\varrho\varrho'\cos.(\theta - \theta') + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$< \varrho^2 + \varrho'^2 + \ldots + 2\varrho\varrho' + \ldots = (\varrho + \varrho' + \ldots\ldots)^2$$

mithin auch

$$R < \varrho + \varrho' + \ldots\ldots$$

sein muß.

Achte Note.

Ueber die Formeln, vermittelst deren man den Sinus oder Cosinus eines Vielfachen von einem Bogen in ein Polynom verwandeln kann, dessen Glieder die aufsteigenden Potenzen des Sinus oder des Cosinus dieses Bogens zu Factoren haben.

Die Formeln, von welchen hier die Rede ist, sind diejenigen, welche wir bei Auflösung der beiden ersten Aufgaben in Cap. 7., §. 5. construirt haben, und welche dort mit den Zahlen (3), (4), (5), (6), (9), (10), (11) und (12) bezeichnet sind. Sie führen uns auf folgende Betrachtungen.

Substituirt man in der Rechnung, mit Hülfe deren die Formeln (3), (4), (5) und (6) gefunden wurden, statt der Gleichungen (12) aus Cap. 7., §. 2. die Gleichungen (24) aus Cap. 9., §. 2., so ersieht man sofort, daß diese Formeln auch dann noch gelten, wenn man an die Stelle der ganzen Zahl m eine beliebige Zahl μ setzt, so lange Zahlenw. $z < \frac{\pi}{4}$ ist. Man hat daher in diesem Falle

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos.\mu z = 1 &- \frac{\mu.\mu}{1.2}\sin.z^2 + \frac{(\mu+2)\mu\mu(\mu-2)}{1.2.3.4}\sin.z^4 \\ &- \frac{\mu+4)(\mu+2)\mu\mu(\mu-2)(\mu-4)}{1.2.3.4.5.6}\sin.z^6 + \text{etc...}, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \sin.\mu z = \cos.z \Big[&\mu\sin.z - \frac{(\mu+2)\mu(\mu-2)}{1.2.3}\sin.z^3 \\ &+ \frac{(\mu+4)(\mu+2)\mu(\mu-2)(\mu-4)}{1.2.3.4.5}\sin.z^5 - \text{etc...} \Big], \end{aligned} \right.$$

und

$$(3)\begin{cases}\cos.\mu z = \cos. z\left[1-\dfrac{(\mu+1)(\mu-1)}{1.2}\sin. z^2\right.\\ \left.+\dfrac{(\mu+3)(\mu+1)(\mu-1)(\mu-3)}{1.2.3.4}\sin. z^4-\text{etc.}\right]\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}\sin.\mu z = \mu\sin. z-\dfrac{(\mu+1)\mu(\mu-1)}{1.2.3}\sin. z^3\\ +\dfrac{(\mu+3)(\mu+1)\mu(\mu-1)(\mu-3)}{1.2.3.4.5}\sin. z^5-\text{etc.}.\end{cases}$$

Ferner kann man nach Cap. 9., §. 2. und nach der vorhergehenden Note nicht nur $\cos.\mu z$ und $\sin.\mu z$, sondern auch die zweiten Theile der Formeln (1), (2), (3), (4) nach den aufsteigenden Potenzen von μ entwickeln, und da die Coefficienten dieser Potenzen in beiden Theilen einer jeden Formel einander gleich sein müssen, so erhält man durch Vergleichung derselben eine Reihe von Gleichungen, unter welchen sich auch folgende befinden:

$$(5)\quad \frac{1}{2}z^2 = \frac{\sin. z^2}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin. z^4}{4}+\frac{2.4}{3.5}\sin. z^6+\text{etc.}...,$$

$$(6)\quad z = \sin. z+\frac{1}{2}\frac{\sin. z^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\sin. z^5}{5}+\text{etc.}...,$$

wo aber z zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{4}$, $+\frac{\pi}{4}$ liegen muß.

Mit Hülfe des Infinitesimalcalculs läßt sich aber darthun, daß z in den Gleichungen (1), (2), (3), (4), (5), (6); etc. bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen kann. Ich mache außerdem darauf aufmerksam, daß die Gleichung (6) mit der Formel (12) aus der siebenten Note, und Gleichung (5) mit

$$(\text{arc.sin.x})^2 = x^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{2}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{x^6}{3}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{x^8}{4}+\text{etc.}...$$

zusammenfällt, wenn man $\sin. z = x$ setzt.

Die letztere Gleichung findet man in den „Mélanges d'analyse, publiés en 1815 par M. de Stainville, répétiteur à l'école royale polytechnique."

Hat z in den aus Cap. 7., §. 5. citirten Formeln einen imaginären Werth, so werden dieselben nach Cap. 9., §. 3. auch in diesem Falle noch gelten. Es sei z. B.

$$z = i.lx,$$

so ist

$$\cos.z = \frac{1}{2}(e^{lx}+e^{-lx}) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right),$$

$$\sin.z = \frac{i}{2}e^{lx}-e^{-lx}) = \frac{i}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right),$$

und allgemein, wenn n eine beliebige ganze Zahl ist,

$$\cos.nz = \frac{1}{2}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right), \sin.nz = \frac{i}{2}\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right).$$

Man erhält daher aus Cap. 7., §. 5., Gleich. (3), (4), (5), (6): 1) für gerade Werthe von m

$$(7)\quad x^m+\frac{1}{x^m} =$$

$$2\left[1+\frac{m.m}{2.4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\frac{(m+2)\,m\,m\,(m-2)}{2.4.6.8}\left(x-\frac{1}{x}\right)^4\right.$$

$$\left.+\frac{(m+4)(m+2)mm(m-2)(m-4)}{2.4.8.10.12}\left(x-\frac{1}{x}\right)^6+\text{etc.}\ldots\right],$$

$$(8)\quad x^m-\frac{1}{x^m} =$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left[\frac{m}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{(m+2)\,m\,(m-2)}{2.4.6}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{(m+4)(m+2)m(m-2)(m-4)}{2.4.6.8.10}\left(x-\frac{1}{x}\right)^5+\text{etc.}\ldots\right];$$

2) für ungerade Werthe von m

$$(9)\quad x^m+\frac{1}{x^m} =$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[1+\frac{(m+1)(m-1)}{2.4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{(m+3)(m+1)(m-1)(m-3)}{2.4.6.8}\left(x-\frac{1}{x}\right)^4+\text{etc.}\ldots\right];$$

$$(10)\quad x^m-\frac{1}{x^m} =$$

$$2\left[\frac{m}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{2.4.6}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{(m+3)(m+1)\,m\,(m-1)(m-3)}{2.4.6.8.10}\left(x-\frac{1}{x}\right)^5+\text{etc.}\ldots\right].$$

Aehnliche Resultate ergeben sich aus Cap. 7., §. 5., Form. (9), (10), (11), (12).

Wir wollen gegenwärtig auf die Formel (3) im vorigen Paragraphen zurückgehen. Nach dieser Formel ist cos. mz, wenn m eine gerade Zahl ist, eine ganze Function von sin. z, und zwar vom Grade m, und da diese Function, so wie auch cos. mz, für Werthe von z, welche in der Reihe

$$-\frac{(m-1)\pi}{2m}, \ldots -\frac{3\pi}{2m}, -\frac{\pi}{2m}, +\frac{\pi}{2m}, +\frac{3\pi}{2m}, \ldots +\frac{(m-1)\pi}{2m}$$

vorkommen, verschwinden muß, so ist es klar, daß sie durch jeden der Binomialfactoren

$$\sin.z+\sin.\frac{(m-1)\pi}{2m}, \ldots \sin.z+\sin.\frac{3\pi}{2m}, \sin.z+\sin.\frac{\pi}{2m},$$

$$\sin.z-\sin.\frac{(m-1)\pi}{2m}, \ldots \sin.z-\sin.\frac{3\pi}{2m}, \sin.z-\sin.\frac{\pi}{2m}$$

theilbar sein muß und also dem Producte aller dieser Binomialfactoren und des Zahlencoefficienten von $\sin. z^m$, nämlich

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{(m+m-2)\ldots(m+2)\,m.\,m(m-2)\ldots(m-m+2)}{1.2.3\ldots(m-1)\,m}$$

$$=(-1)^{\frac{m}{2}}.2^{m-1}$$

gleich ist. Es ist demnach, wenn m eine gerade Zahl ist,

$$(11) \qquad \cos. mz = 2^{m-1} \times$$

$$\left(\sin.\left(\frac{\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2\right)\left(\sin.\left(\frac{3\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\left(\sin.\left(\frac{\overline{m-1}.\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2\right).$$

Durch ein ähnliches Raisonnement erhält man aus Cap. 7., §. 5., Form. (4), (5) und (6), 1) wenn m eine gerade Zahl ist,

$$(12) \qquad \sin. mz = 2^{m-1}.\sin. z.\cos. z \times$$

$$\left(\sin.\left(\frac{2\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2\right)\left(\sin.\left(\frac{4\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\left(\sin.\left(\frac{\overline{m-2}.\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2\right);$$

2) wenn m eine ungerade Zahl ist,

(13) $$\cos. mz = 2^{m-1} \cos. z \times \left(\sin.\left(\frac{\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2\right)\left(\sin.\left(\frac{3\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2\right) \ldots \ldots \ldots \left(\sin.\left(\frac{\overline{m-2}.\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2\right),$$

und

(14) $$\sin. mz = 2^{m-1} \sin. z \times \left(\sin.\left(\frac{2\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2\right)\left(\sin.\left(\frac{4\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2\right) \ldots \ldots \ldots \left(\sin.\left(\frac{\overline{m-1}.\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2\right).$$

Wenn man in den vier letzten Gleichungen den constanten Theil eines jeden Binomialfactors auf die Einheit reducirt, d. h. wenn man z. B.

$$1 - \frac{\sin. z^2}{\sin.\left(\frac{\pi}{2m}\right)^2} \text{ statt } \sin.\left(\frac{\pi}{2m}\right)^2 - \sin. z^2$$

schreibt, so werden die numerischen Factoren im zweiten Theile dieser Gleichungen offenbar denen der Glieder gleich, welche in Cap. 7., §. 5., Form. (3), (4), (5), (6) entweder von sin. z unabhängig sind, oder dessen erste Potenz enthalten, also gleich 1 oder gleich m. Man findet demnach 1) wenn m eine gerade Zahl ist,

(15) $$\cos. mz = \left(1 - \frac{\sin. z^2}{\sin.\left(\frac{\pi}{2m}\right)^2}\right)\left(1 - \frac{\sin. z^2}{\sin.\left(\frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\sin. z^2}{\sin.\left(\frac{\overline{m-1}.\pi}{2m}\right)^2}\right),$$

(16) $$\sin. mz = m \sin. z . \cos. z \times \left(1 - \frac{\sin. z^2}{\sin.\left(\frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right)\left(1 - \frac{\sin. z^2}{\sin.\left(\frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\sin. z^2}{\sin.\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right);$$

2) wenn m eine ungerade Zahl ist,

(17) $$\cos. mz = \cos. z \times \left(1 - \frac{\sin. z^2}{\sin.\left(\frac{\pi}{2m}\right)^2}\right)\left(1 - \frac{\sin. z^2}{\sin.\left(\frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\sin. z^2}{\sin.\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right),$$

$$(18)\qquad \sin.\, mz = m \sin.\, z \times \left(1-\frac{\sin.\, z^2}{\sin.\left(\frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right)\left(1-\frac{\sin.\, z^2}{\sin.\left(\frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin.\, z^2}{\sin.\left(\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2}\right).$$

Erwägt man ferner, daß ganz allgemein

$$\sin.\, b^2 - \sin.\, a^2 = \frac{\cos.\, 2a - \cos.\, 2b}{2}$$

ist, so sieht man leicht ein, daß man statt der Gleichungen (11), (12), (13), (14) folgende einführen kann:

$$(19)\begin{cases} \cos.mz = 2^{\frac{m}{2}-1}\left(\cos.2z-\cos.\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos.2z-\cos.\frac{3\pi}{m}\right)\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\left(\cos.2z-\cos.\frac{(m-1)\pi}{m}\right), \\ \sin.mz = 2^{\frac{m}{2}-1}\sin.2z\left(\cos.2z-\cos.\frac{2\pi}{m}\right)\left(\cos.2z-\cos.\frac{4\pi}{m}\right).. \\ \qquad\qquad \ldots\left(\cos.2z-\cos.\frac{(m-2)\pi}{m}\right), \end{cases}$$

$$(20)\begin{cases} \cos.mz = 2^{\frac{m-1}{2}}\cos.z\left(\cos.2z-\cos.\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos.2z-\cos.\frac{3\pi}{m}\right).. \\ \qquad\qquad \ldots\left(\cos.2z-\cos.\frac{(m-2)\pi}{m}\right), \\ \sin.mz = 2^{\frac{m-1}{2}}\sin.z\left(\cos.2z-\cos.\frac{2\pi}{m}\right)\left(\cos.2z-\cos.\frac{4\pi}{m}\right)... \\ \qquad\qquad \ldots\left(\cos.2z-\cos.\frac{(m-1)\pi}{m}\right). \end{cases}$$

Setzt man in den Gleichungen (9), (10), (11), (12) aus Cap. 7., §. 5. $\frac{\pi}{2} - z$ für z, so erhält man eben so viele neue Gleichungen, welche mit jenen Formeln correspondiren. Setzt man hingegen, (19) und (20), $z = i \,.\, lx$, so findet man, wenn m eine gerade Zahl ist,

$$(21)\begin{cases} x^m+\frac{1}{x^m}=\left(x^2-2\cos.\frac{\pi}{m}+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-2\cos.\frac{3\pi}{m}+\frac{1}{x^2}\right)\ldots \\ \qquad\ldots\left(x^2-2\cos.\frac{(m-1)\pi}{m}+\frac{1}{x^2}\right), \\ x^m-\frac{1}{x^m}=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-2\cos.\frac{2\pi}{m}+\frac{1}{x^2}\right)\ldots \\ \qquad\ldots\left(x^2-2\cos.\frac{(m-2)\pi}{m}+\frac{1}{x^2}\right), \end{cases}$$

und wenn m eine ungerade Zahl ist,

$$(22)\begin{cases} x^m+\frac{1}{x^m}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-2\cos.\frac{\pi}{m}+\frac{1}{x^2}\right)\ldots \\ \qquad\ldots\left(x^2-2\cos.\frac{(m-2)\pi}{m}+\frac{1}{x^2}\right), \\ x^m-\frac{1}{x^m}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2-2\cos.\frac{2\pi}{m}+\frac{1}{x^2}\right)\ldots \\ \qquad\ldots\left(x^2-2\cos.\frac{(m-1)\pi}{m}+\frac{1}{x^2}\right); \end{cases}$$

was mit den oben in Cap. 10., §. 2. erhaltenen Resultaten übereinstimmt.

Es bleibt uns nur noch übrig, einige merkwürdige Folgerungen aus den Gleichungen (11) und (15), (12) und (16), (13) und (17), (14) und (18) anzuführen. Wenn man die zweiten Theile derselben nach den aufsteigenden Potenzen von sin. z entwickelt, so müssen die Zahlencoefffcienten dieser Potenzen offenbar dieselben sein, welche in Cap. 7., §. 5., Form. (3), (4), (5) und (6) vorkommen. Aus dieser einzigen Bemerkung ergeben sich unmittelbar mehrere Gleichungen, welchen die Sinus der Bogen

$$\frac{\pi}{2m},\ \frac{2\pi}{2m},\ \frac{3\pi}{2m},\ \frac{4\pi}{2m},\ \text{etc.}\ldots$$

Genüge leisten müssen. Man findet z. B., wenn m eine gerade Zahl ist,

$$(23)\begin{cases} 1=2^{m-1}.\sin.\left(\frac{\pi}{2m}\right)^2.\sin.\left(\frac{3\pi}{2m}\right)^2\ldots\sin.\left(\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2, \\ m=2^{m-1}.\sin.\left(\frac{2\pi}{2m}\right)^2.\sin.\left(\frac{4\pi}{2m}\right)^2\ldots\sin.\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2; \end{cases}$$

$$(24)\begin{cases}\dfrac{m.m}{1.2}=\dfrac{1}{\sin.\left(\frac{\pi}{2m}\right)^2}+\dfrac{1}{\sin.\left(\frac{3\pi}{2m}\right)^2}+\ldots+\dfrac{1}{\sin.\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)^2},\\ \dfrac{(m+2)(m-2)}{1.2.3}=\dfrac{1}{\sin.\left(\frac{2\pi}{2m}\right)^2}+\dfrac{1}{\sin.\left(\frac{4\pi}{2m}\right)^2}+\ldots\\ \qquad\qquad\ldots\ldots+\dfrac{1}{\sin.\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2};\end{cases}$$

und wenn m eine ungerade Zahl ist,

$$(25)\begin{cases}1=2^{m-1}.\sin.\left(\frac{\pi}{2m}\right)^2.\sin.\left(\frac{3\pi}{2m}\right)^2\ldots\sin.\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2,\\ m=2^{m-1}.\sin.\left(\frac{2\pi}{2m}\right)^2.\sin.\left(\frac{4\pi}{2m}\right)^2\ldots\sin.\left(\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2,\end{cases}$$

$$(26)\begin{cases}\dfrac{(m+1)(m-1)}{1.2}=\dfrac{1}{\sin.\left(\frac{\pi}{2m}\right)^2}+\dfrac{1}{\sin.\left(\frac{3\pi}{2m}\right)^2}+\ldots\\ \qquad\qquad\ldots\ldots+\dfrac{1}{\sin.\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2},\\ \dfrac{(m+1)(m-1)}{1.2.3}=\dfrac{1}{\sin.\left(\frac{2\pi}{2m}\right)^2}+\dfrac{1}{\sin.\left(\frac{4\pi}{2m}\right)^2}+\ldots\\ \qquad\qquad\ldots\ldots+\dfrac{1}{\sin.\left(\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2}.\end{cases}$$

Multiplicirt man in den Gleichungen (24) und (26) beide Theile mit $\left(\frac{\pi}{m}\right)^2$, und ſetzt man $m=\infty$, ſo erhält man

$$(27)\quad \frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\text{etc.}\ldots,$$

$$(28)\quad \frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\ldots.$$

Wir wollen nur bei der zweiten der Gleichungen (24) die Rech-

nung durchführen. Multiplicirt man beide Theile der Gleichung mit $\left(\frac{\pi}{m}\right)^2$, so erhält man

$$(29)\quad \frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{4}{m^2}\right)=$$

$$\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}+\frac{1}{9}\cdot\frac{\left(\frac{3\pi}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{3\pi}{m}\right)^2}+\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}.$$

Es sei nun n eine ganze Zahl, und kleiner als $\frac{m}{2}$; M (a, b) hingegen ein Mittel zwischen den Größen a und b. Ferner wollen wir uns daran erinnern, daß $\frac{x}{\sin. x}$ (siehe Cap. 2., §. 3.) immer zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{\cos. x}$ liegt, und daß mithin für Zahlenw. $x < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{x}{\sin. x}=\frac{\frac{1}{2}x}{\sin.\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{\cos.\frac{1}{2}x}<\frac{1}{\cos.\frac{1}{2}x^2}<\frac{1}{\cos.\frac{\pi^2}{4}}=2$$

ist, so wird die Gleichung (29) offenbar der Summe der beiden Polynomien

$$\frac{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2},$$

und

$$\frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{\left(\frac{(n+1)\,\pi}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(n+1)\,\pi}{m}\right)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \cdot \frac{\left(\frac{(n+2)\,\pi}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(n+2)\,\pi}{m}\right)^2} + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{(m-2)\,\pi}{2m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(m-2)\,\pi}{2m}\right)^2}$$

gleich sein, von welchen das erstere nach Gleichung *(11)* in den Vorerinnerungen auch unter die Form

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) \cdot M\left(1, \frac{1}{\cos.\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}\right)$$

gebracht werden kann, während das zweite, welches aus $\frac{m}{2} - n - 1$ Gliedern besteht, die alle kleiner als $\frac{4}{n^2}$ sind, zwischen den Grenzen 0 und $\frac{2m}{n^2}$ liegen muß. Die Gleichung (29) verwandelt sich demnach in

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{4}{m^2}\right) =$$

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) \cdot M\left(1, \frac{1}{\cos.\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}\right)$$

$$+ \frac{2m}{n^2} \cdot M\,(0,\,1),$$

woraus man unmittelbar erhält

$$(30) \qquad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{4}{m^2}\right) \cdot M\left(1, \cos.\left(\frac{n\,\pi}{m}\right)^2\right) - \frac{2m}{n^2} \cdot M\,(0,\,1).$$

Diese Formel gilt, unabhängig von jedem besonderen Werthe von m und n, so lange nur $\frac{1}{2}\,m > n$ ist. Nun aber ist leicht einzusehen, daß, wenn man beständig für $\frac{1}{2}\,m$ die kleinste unter den ganzen Zahlen setzt, welche größer als n^a sind

(wo a eine zwischen 1 und 2 liegende Zahl bedeutet), die Quotienten $\frac{n}{m}$, $\frac{m}{n^2}$ sich, wenn n beständig wächst, der Grenze 0 nähern müssen, während der zweite Theil von (30) sich der Grenze $\frac{\pi^2}{6}$ nähert. Da der erste Theil mit dem zweiten einerlei Grenze haben muß, so folgt: 1) daß die Reihe

$$\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots \frac{1}{n^2}, \text{etc.}\ldots\right)$$

convergiren muß, was wir übrigens schon aus Cap. 7., §. 2., Lehrs. 3., Zus. wissen; 2) daß die Summe dieser Reihe $\frac{\pi^2}{6}$ ist.

Aus der Gleichung (28), deren Richtigkeit also nachgewiesen wäre, erhält man, wenn man ihre beiden Theile durch 4 dividirt,

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \text{etc.}\ldots\ldots$$

Es ist demnach

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \text{etc.}\ldots,$$

und diese Formel stimmt mit der Gleichung (27) überein, welche man aber auch direct aus der ersten der Gleichungen (24) oder (26) herleiten kann.

Bevor wir diese Note schließen, machen wir noch darauf aufmerksam, daß man, um die acht Formeln (3), (4), (5), (6), (9), (10), (11), (12) in Cap. 7., §. 5. zu erhalten, nur zuvörderst die vier letzteren zu finden braucht, und daß man hierzu sehr schnell gelangt, wenn man die Gleichungen (10) in Cap. 9., §. 1., nämlich

$$(31)\quad 1 + z\cos.\theta + z^2\cos.2\theta + z^3.\cos.3\theta + \text{etc.} = \frac{1 - z\cos.\theta}{1 - 2z\cos.\theta + z^2} \begin{Bmatrix} z = -1 \\ z = +1 \end{Bmatrix};$$

$$(32)\quad z\sin.\theta + z^2\sin.2\theta + z^3\sin.3\theta + \text{etc.} = \frac{z\sin.\theta}{1 - 2z\cos.\theta + z^2} \begin{Bmatrix} z = -1 \\ z = +1 \end{Bmatrix},$$

entwickelt. Wir wollen z. B. die Gleichung (32) betrachten. Sie gibt für Zahlenw. $z < 1$

$$z \sin.\theta + z^2 \sin.2\theta + z^3 \sin.3\theta + \ldots\ldots$$
$$\ldots + z^{2n} \sin.2n\theta + z^{2n+1} . \sin.(2n+1)\theta + \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{1+z^2} \cdot \frac{z \sin.\theta}{1 - \frac{2z \cos.\theta}{1+z^2}} = \sin.\theta \,[z(1+z^2)^{-1}$$
$$+ 2z^2 \cos.\theta (1+z^2)^{-2} + 4z^3 \cos.\theta^2 (1+z^2)^{-3} + \text{etc.}]$$
$$= \sin.\theta \times \left\{ \begin{array}{l} z - z^3 + z^5 - \ldots\ldots \pm z^{2n+1} \mp \text{etc.} \\ + \cos.\theta\,(2z^2 - 4z^4 + \ldots\ldots \mp 2nz^{2n} \pm \text{etc.}) \\ + \cos.\theta^2 \left(\frac{2.4}{1.2} z^3 - \frac{4.6}{1.2} z^5 + \ldots \mp \frac{2n(2n+2)}{1.2} z^{2n+1} \pm \text{etc.}\right) \\ + \cos.\theta^3 \left(\frac{2.4.6}{1.2.3} z^4 - \ldots \pm \frac{(2n-2)2n(2n+2)}{1.2.3} z^{2n} \mp \text{etc.}\right) \\ + \text{etc.}\ldots\ldots \end{array} \right\};$$

Man findet daher, wenn man die Coefficienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich setzt,

(33) $$\sin.2n\theta =$$
$$(-1)^{n+1} . \sin.\theta \left[2n \cos.\theta - \frac{(2n-2)2n(2n+2)}{1.2.3} \cos.\theta^3 + \text{etc.}\right],$$

(34) $$\sin.(2n+1)\theta =$$
$$(-1)^n . \sin.\theta \left[1 - \frac{2n(2n+2)}{1.2} \cos.\theta^2 + \text{etc.}\ldots\right].$$

Setzt man in diesen beiden Formeln z für θ, und m für $2n$ oder für $2n+1$, so erhält man genau die Gleichungen (10) und (11) aus Cap. 7., §. 5. Die Gleichungen (9) und (12) desselben Paragraphen kann man durch ein ähnliches Verfahren aus der Formel (31) herleiten.

Neunte Note.

Ueber die Producte, welche durch unendlich viele Factoren gebildet werden.

Es sei

(1) $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$, etc. . . .

eine Reihe von positiven oder negativen Gliedern, welche insgesammt größer als -1 sind. Bilden nun die Größen

(2) $l(1+u_0), l(1+u_1), l(1+u_2), \ldots l(1+u_n)$, etc. . . .

eine convergirende Reihe, deren Summe s sein mag, so wird das Product

(3) $(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_{n-1})$

offenbar sich der Grenze e^s nähern, wenn n beständig wächst. Ist dagegen die Reihe (2) divergirend, so wird es keine solche endliche und von Null verschiedene Grenze für das Product (3) geben. Im ersteren Falle bezeichnet man gewöhnlich die Grenze des besagten Productes durch

(4) $(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)$ etc. . . . .

Man schreibt also das Product einiger seiner ersten Factoren hin und hängt demselben das Zeichen etc.... an. Dieselbe Bezeichnungsart kann man auch dann beibehalten, wenn diese Grenze Null wird. Wenn die Reihe (2) convergiren soll, so muß zuvörderst, wenn n beständig zunimmt, ein jeder von den Ausdrücken

$l(1+u_n), l(1+u_{n+1}), l(1+u_{n+2})$, etc. . . .

folglich auch eine jede von den Größen

u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, etc. . . . .

unendlich klein werden. Da ganz allgemein

(5) $l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.} \left\{ \begin{matrix} x=-1 \\ x=+1 \end{matrix} \right\}$

ist, so findet man für sehr große Werthe von n

$$(6)\begin{cases} l(1+u_n) = \\ u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{3}u_n^3 - \text{etc.} = u_n - \frac{1}{2}u_n^2(1 \pm \varepsilon_n), \\ l(1+u_{n+1}) = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_{n+1}^2 + \frac{1}{3}u_{n+1}^3 - \text{etc.} \\ = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_{n+1}^2(1 \pm \varepsilon_{n+1}), \\ \text{etc} \ldots\ldots \end{cases}$$

wo $\pm\varepsilon_n$, $\pm\varepsilon_{n+1}$, etc.... gleichfalls unendlich kleine Größen bedeuten. Ist nun m eine beliebige ganze Zahl, und $1 \pm \varepsilon$ ein Mittel zwischen $1 \pm \varepsilon_n$, $1 \pm \varepsilon_{n+1}$, etc...., so ist auch

$$(7)\begin{cases} l(1+u_n) + l(1+u_{n+1}) + \ldots + l(1+u_{n+m-1}) \\ = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+m-1} - \frac{1}{2}(u_n^2 + u_{n+1}^2 + \ldots \\ \ldots + u^2_{n+m-1})(1 \pm \varepsilon). \end{cases}$$

Wenn nun $m = \infty$ wird, so wird, je nachdem die beiden Theile der Formel sich einer bestimmten Grenze nähern oder nicht, auch die Reihe (2) convergiren oder divergiren. — Man braucht übrigens nur den zweiten Theil unserer Formel zu betrachten, so erhält man folgenden Satz.

Lehrsatz 1. Wenn die Reihen (1) und

$$(8) \qquad u_0^2, u_1^2, u_2^2, \ldots u_n^2, \text{etc.}\ldots$$

beide convergiren, so ist dies auch bei (2) der Fall, und das Product (3) wird alsdann, wenn n beständig zunimmt, sich einer endlichen, von Null verschiedenen Grenze nähern. Wenn aber die Reihe (1) convergirt, die Reihe (8) hingegen divergirt, so wird das Product (3) sich nothwendigerweise der Grenze Null nähern, indem alsdann $-\infty$ die Grenze des zweiten Theiles von (7) ist.

Zusatz 1. Ist die Reihe (2) convergirend und sind alle ihre Glieder positiv, oder bleibt sie selbst dann convergirend, wenn man ihre Glieder auf deren Zahlenwerthe reducirt, so kann man sich von der Convergenz der Reihe (8) überzeugt halten, mithin wird alsdann auch das Product (3) eine endliche und von Null verschiedene Grenze haben. Dies

ist z. B. der Fall, wenn das besagte Product eins von den folgenden ist:

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2}\right),$$

$$(1+1)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1\pm\frac{1}{n^2}\right),$$

$$(1+x^2)\left(1+\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Zusatz 3. Da die Reihe

$$1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{4}}, \text{ etc.}\ldots$$

convergirt, während die Quadrate ihrer Glieder

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \text{ etc.}\ldots$$

eine divergirende Reihe bilden, so folgt aus Lehrsatz 1., daß die Grenze des Productes

$$(1+1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\text{etc.}\ldots$$

Null ist.

Zusatz 3. Der erste Lehrsatz gilt offenbar selbst dann, wenn einige von den ersten Gliedern der Reihe (1) kleiner als -1 sind. Nur treten in diesem Falle in der Reihe (2) an die Stelle der Logarithmen der negativen Größen die Logarithmen ihrer Zahlenwerthe. Es ist demnach klar, daß das Product

$$(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

sich, wenn n beständig wächst, für jeden endlichen Werth von x einer endlichen und von Null verschiedenen Grenze nähern wird.

Zusatz 4. Wenn die Reihe (1) convergirt, so nähert sich auch, wenn n beständig zunimmt, das Product (3) einer endlichen Grenze, welche sich auch in einzelnen Fällen auf Null reduciren kann.

Ist die Grenze des Productes (3) eine endliche Größe, ohne jedoch Null zu sein, so läßt sich dennoch nicht immer der Werth des Productes genau angeben. Unter der kleinen Anzahl von Producten dieser Art, welche eine bekannte Grenze haben, verdient folgendes eine nähere Betrachtung:

$$(9)\quad (1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

und wir wollen uns deshalb mit demselben beschäftigen.

Setzt man $x=\frac{z}{\pi}$, und $n=\infty$, so wird sich das Product (9) einer endlichen Grenze genähert haben, welche durch

$$(10)\quad \left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\text{etc.}\ldots.$$

bezeichnet werden kann. Um diese Grenze zu bestimmen, braucht man nur auf Gleich. (16) oder (18) in der vorhergehenden Note zurückzugehen. Wir wollen z. B. Gleich. (16) betrachten.

Setzt man hier $\frac{z}{m}$ für z, so findet man, wenn m eine gerade Zahl ist,

$$(11)\quad \sin.z=m\sin.\frac{z}{m}\cos.\frac{z}{m}\times$$

$$\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}\right\}\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}\right\}\ldots\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right\},$$

folglich, wenn Zahlenw. $z<\pi$, und $m\geqq 2$ ist,

$$(12)\quad l\frac{\sin.z}{m\sin.\frac{z}{m}\cos.\frac{z}{m}}=l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}\right\}+l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}\right\}+\ldots$$

$$\ldots+l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right\}.$$

Es sei ferner n eine ganze Zahl und kleiner als $\frac{1}{2}$ m, und $1+\alpha$ ein Mittel zwischen den Quotienten

$$l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}\right\}, \quad l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}\right\}, \quad \ldots l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}\right\},$$

$$\frac{}{l\left\{1-\frac{z^2}{\pi^2}\right\}}, \quad \frac{}{l\left\{1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right\}}, \quad \frac{}{l\left\{1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right\}},$$

und $1 + \beta$ ein anderes Mittel zwischen den Ausdrücken

$$l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(n+1)\pi}{m}\right)^2}\right\} \quad l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(n+2)\pi}{2m}\right)^2}\right\}$$

$$-\frac{}{\left\{\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(n+1)\pi}{m}\right)^2}\right\}}, \quad -\frac{}{\left\{\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(n+2)\pi}{m}\right)^2}\right\}} \ldots.$$

$$\ldots\ldots -\frac{l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right\}}{\left\{\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right\}},$$

so ist der zweite Theil der Gleichung (12) offenbar der Summe der beiden Polynomien

$$l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}\right\}+l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}\right\}+\ldots$$

$$\ldots+l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{n\pi}{m}\right)^2}\right\}, \text{ und}$$

$$l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(n+1)\pi}{m}\right)^2}\right\}+l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(n+2)\pi}{m}\right)^2}\right\}+\ldots$$

$$\ldots+l\left\{1-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right\}$$

gleich, von welchen das erstere unter die Form

$$\left[1\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)+1\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)+\ldots+1\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\right].(1+\alpha),$$

das zweite hingegen unter die Form

$$-\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}\times$$

$$\left\{\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{\left(\frac{(n+1)\,\pi}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(n+1)\,\pi}{m}\right)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}\cdot\frac{\left(\frac{(n+2)\,\pi}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(n+2)\,\pi}{m}\right)^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{1}{\left(\frac{m}{2}-1\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{(m-2)\,\pi}{m}\right)^2}{\sin.\left(\frac{(m-2)\,\pi}{2m}\right)^2}\right\}.(1+\beta)$$

gebracht werden kann. Da nun aber (nach den in der vorhergehenden Note aufgestellten Principien) der zuletzt angegebene Ausdruck sich in

$$-\frac{2m}{n^2}\cdot\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}.(1+\beta).M(0,1)$$

verwandeln läßt, so geht die Gleichung (12) in

$$(13)\qquad 1\frac{\sin.\,z}{m\sin.\frac{z}{m}\cos.\frac{z}{m}}=$$

$$\left[1\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)+1\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)+\ldots+1\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\right].(1+\alpha)$$

$$-\frac{2m}{n^2}\cdot\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}.(1+\beta).M(0,1)$$

über, woraus man, wenn man der Kürze wegen

$$(14)\quad \frac{1}{1+\alpha}=1+\gamma;\frac{\sin.\left(\frac{z}{m}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}\cdot\frac{1+\beta}{1+\alpha}=\frac{z^2}{\pi^2}\cdot(1+\delta)$$

setzt und von den Logarithmen auf die Zahlen zurückgeht, erhält

$$(15)\quad \left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z_2}{n^2\pi^2}\right)=$$
$$\left(\frac{\sin.\ z}{m\sin.\frac{z}{m}\ \cos.\frac{z}{m}}\right)^{1+\gamma}\cdot e^{\frac{2mz^2}{n^2\pi^2}(1+\delta)}.M(0,1).$$

Setzt man nun für n einen ganz beliebigen Werth, und für $\frac{1}{2}.m$ diejenige ganze Zahl, welche unmittelbar auf n^a folgt (wo a eine zwischen 1 und 2 liegende gebrochene oder irrationale Zahl bedeutet), so werden, wenn der Werth von n sehr groß ist, die Größen $\frac{n}{m}$, $\frac{m}{n^2}$, α, β, γ, δ, unendlich klein werden; das Product

$$m\sin.\frac{z}{m}\cos.\frac{z}{m}=\frac{\sin.\frac{z}{m}}{\frac{z}{m}}.z.\cos.\frac{z}{m}$$

wird alsdann nur sehr wenig von z verschieden sein; und es wird sich demnach der zweite Theil von (15) der Grenze

$$\frac{\sin.\ z}{z}$$

unendlich genähert haben. Da aber auch der erste Theil sich derselben Grenze nähern muß, so ist nothwendigerweise

$$(16)\quad \left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\text{etc...}=\frac{\sin.\ z}{z}.$$

So wäre denn die Richtigkeit dieser Formel für Zahlenwerth $z<\pi$ bewiesen, in welchem Falle die Logarithmen, welche in der Rechnung vorkamen, alle positiv sind. Aber der gegebene Beweis gilt auch für Zahlenw. $z>\pi$, wenn man nur statt des Logarithmus jeder negativen Größe den Logarithmus ihres Zahlenwerthes nimmt. Folglich gilt die Gleichung (16) für beliebige reelle Werthe von z, selbst den Fall nicht ausgenommen, wo

$$z=\pm k\pi$$

ist (wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet); denn in diesem Falle verschwinden beide Theile der Gleichung zugleich.

Aus (16) lassen sich unmittelbar mehrere andere Gleichungen ableiten. So z. B. erhält man für beliebige reelle Werthe von x, y, z

$$(17)\quad \sin. z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\text{etc.} =$$

$$z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\left(1-\frac{z}{3\pi}\right)\left(1+\frac{z}{3\pi}\right)\text{etc....}$$

und

$$(18)\quad \frac{\sin. x}{\sin. y} =$$

$$\frac{x}{y}\left(\frac{\pi-x}{\pi-y}\right)\left(\frac{\pi+x}{\pi+y}\right)\left(\frac{2\pi-x}{2\pi-y}\right)\left(\frac{2\pi+x}{2\pi+y}\right)\left(\frac{3\pi-x}{3\pi-y}\right)\left(\frac{3\pi+x}{3\pi+y}\right)\text{etc....}$$

Setzt man in (17) $z = \frac{\pi}{2}$, so findet man

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\text{etc....}$$

mithin erhält man die (durch den Goemeter Wallis entdeckte) Entwickelung von $\frac{\pi}{2}$ in Factoren, nämlich

$$(19)\quad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\text{etc....}$$

Setzt man $z = \frac{\pi}{4}$, so erhält man

$$(20)\quad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{16}{17}\cdot\text{etc...}$$

Setzt man in (18) $x = \frac{\pi}{2} - z$, und $y = \frac{\pi}{2}$, so findet man

$$(21)\quad \cos. z =$$

$$\left(1-\frac{2z}{\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{\pi}\right)\left(1-\frac{2z}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2z}{5\pi}\right)1+\frac{2z}{5\pi}\text{etc....}$$

$$= \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right)\text{etc....}$$

Dieselbe Formel kann man auch direct aus (15) und (17) in der vorhergehenden Note herleiten. Man darf nämlich dort nur $\frac{z}{m}$ für z setzen und $m = \infty$ annehmen. Endlich bemerke

ich noch, daß, wenn in (16) der Zahlenwerth von z kleiner als π angenommen wird, man erhalten wird

$$(22)\quad l\frac{\sin.z}{z} = l\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)+l\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)+l\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)+\text{etc.}$$
$$= -\frac{z^2}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\text{etc.}\ldots\right)$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^4}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\text{etc.}\ldots\right)$$
$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{z^6}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\text{etc.}\ldots\right)$$
$$-\text{etc.}\ldots\ldots$$

Nun ist aber in diesem Falle auch

$$\frac{\sin.z}{z} < 1, \text{ und}$$

$$(23)\quad l\frac{\sin.z}{z} = l\left(1-\frac{z^2}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4.5}-\frac{z^6}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{etc.}\right)$$
$$= -\frac{z^2}{1.2.3}\left(1-\frac{z^2}{4.5}+\frac{z^4}{4.5.6.7}-\text{etc.}\ldots\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{1.2.3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{z^2}{4.5}+\text{etc.}\ldots\right)^2$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{z^2}{1.2.3}\right)^3\cdot\left(1-\text{etc.}\ldots\right)^3$$
$$-\text{etc.}\ldots\ldots$$

mithin nach den in Cap. 6. und Note 7. aufgestellten Principien

$$(24)\quad l\frac{\sin.z}{z} =$$
$$-\frac{1}{6}\cdot\frac{2z^2}{1.2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{30}\cdot\frac{2^3z^4}{1.2.3.4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{42}\cdot\frac{2^5z^6}{1.2.3.4.5.6}-\text{etc.}$$

Durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von z in (22) und (24) erhält man die Gleichungen

$$(25)\quad \begin{cases} 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}\ldots = \frac{1}{6}\cdot\frac{2\pi^2}{1.2} = \frac{\pi^2}{6}, \\ 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}\ldots = \frac{1}{30}\cdot\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4} = \frac{\pi^4}{90}, \\ 1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{etc.}\ldots = \frac{1}{42}\cdot\frac{2^5\pi^6}{1.2.3.4.5.6} = \frac{\pi^6}{945}, \\ \text{etc.}\ldots\ldots, \end{cases}$$

von welchen die erste mit der Gleichung (28) in Note 8. übereinstimmt. Die Factoren $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}$, etc...., welche in den zweiten Theilen dieser Gleichungen vorkommen, sind die sogenannten Bernoulli'schen Zahlen. Es verdient bemerkt zu werden, daß, wenn 2m eine beliebige gerade Zahl ist, auch

$$(26) \quad 1+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{5^{2m}}+\frac{1}{7^{2m}}+\text{etc}\ldots.$$

$$=1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\text{etc}\ldots-\frac{1}{2^{2m}}\left(1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\text{etc}\ldots.\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\text{etc}\ldots.\right)$$

ist. — Bisher haben wir nur solche Producte betrachtet, deren Factoren sämmtlich reelle Größen sind, und Reihen, von deren Gliedern dieses gleichfalls gilt. Es verdient aber bemerkt zu werden, daß 1) nach Cap. 9., §. 2., Gleich. (37) und §. 3., Gleich. (26) die Formel (5) auch dann gilt, wenn x imaginär ist, wenn nur der Modulus von x kleiner als 1 ist; 2) daß der Quotient

$$\frac{\sin. z}{z}=1-\frac{z^2}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4.5}-etc....$$

sich der Einheit nähert, wenn der reelle oder imaginäre Werth von x sich beständig der Grenze Null nähert; 3) daß die Gleichungen (15), (16), (17) und (18) in Note 8. für reelle und imaginäre Werthe von z gelten. Geht man von diesen Bemerkungen aus, so kann man leicht erkennen, auf welche Weise man die oben bewiesenen Sätze und Formeln modificiren muß, wenn die Ausdrücke

$$u_0, u_1, u_2, \text{etc}....., x, y, z$$

imaginär werden. So z. B. findet man mit Hülfe der Formeln (6) ohne Mühe folgenden Satz, welcher dem ersten Zusatze zu Lehrs. 1. analog ist.

Lehrsatz 2. Ist die Reihe (1) imaginär, und erhält man eine convergirende Reihe, wenn man die Glieder von (1) auf ihre respectiven Moduli reducirt, so nähert sich das Product (3), wenn n beständig zunimmt, nothwendigerweise einer endlichen reellen oder imaginären Grenze.

Ferner läßt sich leicht darthun, daß die Gleichungen (17) und (21) auch dann gelten, wenn man für z einen beliebigen

imaginären Werth $u + vi$ ſetzt, woraus denn 1) folgt, daß man die imaginären Ausdrücke

$$(27)\quad \begin{cases} \left(\frac{e^v+e^{-v}}{2}\right)\sin.\,u + \left(\frac{e^v-e^{-v}}{2}\right)\cos.\,u\,.\,i, \\ \left(\frac{e^v+e^{-v}}{2}\right)\cos.\,u - \left(\frac{e^v-e^{-v}}{2}\right)\sin.\,u\,.\,i, \end{cases}$$

ſo wie auch die Quadrate ihrer Moduli, nämlich

$$(28)\quad \begin{cases} \left(\frac{e^v+e^{-v}}{2}\right)^2.\sin.\,u^2 + \left(\frac{e^v-e^{-v}}{2}\right)^2.\cos.\,u^2 = \\ \frac{e^{2v}+e^{-2v}}{2} - \cos.\,2u \\ \left(\frac{e^v+e^{-v}}{2}\right)^2.\cos.\,u^2 + \left(\frac{e^v-e^{-v}}{2}\right)^2.\sin.\,u^2 = \\ \frac{e^{2v}+e^{-2v}}{2} + \cos.\,2u \end{cases}$$

durch Producte von unendlich vielen Factoren ausdrücken kann; 2) daß die Ausdrücke

$$(29)\quad \begin{cases} \text{arc. tang.}\left(\frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}\,.\,\text{cotg.}\,u\right), \\ \text{arc. tang.}\left(\frac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}\,.\,\text{tang.}\,u\right) \end{cases}$$

reſpective den beiden Summen

$$(30)\quad \begin{cases} \text{arc. tang.}\frac{v}{u} - \text{arc. tang.}\frac{v}{\pi-u} + \text{arc. tang.}\frac{v}{\pi+u} \\ \quad - \text{arc. tang.}\frac{v}{2\pi-u} + \text{arc. tang.}\frac{v}{2\pi+u} - \text{etc..,\ und} \\ \text{arc. tang.}\frac{2v}{\pi-2u} - \text{arc. tang.}\frac{2v}{\pi+2u} + \text{arc. tang.}\frac{2v}{3\pi-2u} \\ \quad - \text{arc. tang.}\frac{2v}{3\pi+2u} + \text{arc. tang.}\frac{2v}{5\pi-2u} - \text{etc....} \end{cases}$$

gleich ſind, vermehrt oder vermindert um $2k\pi$, wo k eine ganze Zahl bedeutet. Da ferner die Ausdrücke (29) und die Summen (30) ſtetige Functionen von v ſind, welche mit dieſer Veränderlichen zugleich verſchwinden, ſo muß $k = 0$ ſein.

Setzt man $u = 0$, ſo findet man

$$(31)\begin{cases}\dfrac{e^v-e^{-v}}{2}=v\left(1-\dfrac{v^2}{\pi^2}\right)\left(1+\dfrac{v^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\dfrac{v^2}{3^2\pi^2}\right)\text{etc.}\ldots,\\ \dfrac{e^v+e^{-v}}{2}=\left(1+\dfrac{2^2v^2}{\pi^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2v^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2v^2}{5^2\pi^2}\right)\text{etc.}\ldots,\end{cases}$$

und wenn man $u=\frac{\pi}{4}$ setzt,

$$(32)\begin{cases}\text{arc. tang.}\left(\dfrac{e^v-e^{-v}}{e^v+e^{-v}}\right)=\text{arc. tang.}\dfrac{4v}{\pi}-\text{arc. tang.}\dfrac{4v}{3\pi}\\ +\text{arc. tang.}\dfrac{4v}{5\pi}-\text{arc. tang.}\dfrac{4v}{7\pi}+\text{etc.}\ldots;\end{cases}$$

endlich, wenn $u=v$ ist,

$$(33)\begin{cases}\dfrac{e^{2v}+e^{-2v}}{2}-\cos.\,2v=\\ 2v^2\left(1+\dfrac{2^2v^4}{\pi^4}\right)\left(1+\dfrac{2^2v^4}{2^4\pi^4}\right)\left(1+\dfrac{2^2v^4}{3^4\pi^4}\right)\text{etc.}\ldots,\\ \dfrac{e^{2v}+e^{-2v}}{2}+\cos.\,2v=\\ \left(1+\dfrac{2^4v^4}{\pi^4}\right)\left(1+\dfrac{2^4v^4}{3^4\pi^4}\right)\left(1+\dfrac{2^4v^4}{5^4\pi^4}\right)\text{etc.}\ldots\end{cases}$$

Ist in Form. (32) Zahlenw. $\frac{4v}{\pi}<1$, so können beide Theile der Formel nach den aufsteigenden Potenzen von v entwickelt werden, und man erhält alsdann durch die Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen in diesen Entwickelungen die Gleichungen

$$(34)\begin{cases}1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\text{etc.}\ldots=\dfrac{\pi}{4},\\ 1-\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{5^3}-\dfrac{1}{7^3}+\text{etc.}\ldots=\dfrac{\pi^3}{32},\\ 1-\dfrac{1}{3^5}+\dfrac{1}{5^5}-\dfrac{1}{7^5}+\text{etc.}\ldots=\dfrac{5\pi^5}{1536},\\ \text{etc.}\ldots\ldots,\end{cases}$$

von welchen die erste mit der Gleichung (40) aus Cap. 9., §. 2. übereinstimmt.

Dividirt man die Ausdrücke (29) und (30) durch v, und läßt man alsdann die Veränderliche v sich der Grenze Null nähern, so findet man zuletzt, wenn man $v = 0$ setzt,

(35) $$\cot. u = \frac{1}{u} - \frac{1}{\pi - u} + \frac{1}{\pi + u} - \frac{1}{2\pi - u} + \frac{1}{2\pi + u} - \text{etc.} \ldots$$

$$= \frac{1}{u} - 2u\left(\frac{1}{\pi^2 - u^2} + \frac{1}{2^2\pi^2 - u^2} + \frac{1}{3^2\pi^2 - u^2} + \text{etc.} \ldots\right),$$

(36) $$\text{tang. } u = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - u} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + u} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - u} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + u} + \frac{1}{\frac{5\pi}{2} - u} - \text{etc.} \ldots$$

$$= 2u\left(\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - u^2} + \frac{1}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - u^2} + \frac{1}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - u^2} + \text{etc.} \ldots\right).$$

Da aber allgemein für Zahlenwerth u < Zahlenw. a

$$\frac{1}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)^{-1} = \frac{1}{a^2} + \frac{u^2}{a^4} + \frac{u^4}{a^6} + \text{etc.} \ldots$$

ist, so erhält man aus Form. (35) und (36), wenn der Zahlenwerth von u kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist,

(37) $$\cot. u = \frac{1}{u} - \frac{2u}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} \ldots\right)$$

$$- \frac{2u^3}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} \ldots\right)$$

$$- \frac{2u^5}{\pi^6}\left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} \ldots\right)$$

$$- \text{etc.} \ldots \ldots,$$

(38) $$\text{tang. } u = \frac{2^3 u}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} \ldots\right)$$

$$+ \frac{2^5 u^3}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} \ldots\right)$$

$$+ \frac{2^7 u^5}{\pi^6}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} \ldots\right)$$

$$+ \text{etc.} \ldots \ldots$$

Folglich ist nach (25) und (26)

$$(39) \quad \cot. u = \frac{1}{u} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2^2 u}{1,2} - \frac{1}{30} \cdot \frac{2^4 u^3}{1.2.3.4} - \frac{1}{42} \cdot \frac{2^6 u^5}{1.2.3.4.5.6} - \text{etc.}\ldots,$$

$$(40) \quad \text{tang. } u = \frac{1}{6}(2^2 - 1) \cdot \frac{2^2 u}{1.2} + \frac{1}{30}(2^4 - 1) \cdot \frac{2^4 u^3}{1.2.3.4} + \frac{1}{42} \cdot (2^6 - 1) \frac{2^6 u^5}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}\ldots$$

Addirt man die beiden letzten Gleichungen, nachdem man für u, $\frac{1}{2} u$ gesetzt hat, so erhält man

$$\cot. \frac{1}{2} u + \text{tang. } \frac{1}{2} u =$$

$$\frac{\cos. \frac{1}{2} u}{\sin. \frac{1}{2} u} + \frac{\sin. \frac{1}{2} u}{\cos. \frac{1}{2} u} = \frac{1}{\sin. \frac{1}{2} u \cos. \frac{1}{2} u} = 2 \text{cosec. } u,$$

und hieraus erhält man

$$(41) \quad \text{cosec. } u = \frac{1}{u} + \frac{1}{6}(2 - 1) \frac{2 u}{1.2} + \frac{1}{30} \cdot (2^3 - 1) \frac{2 u^3}{1.2.3.4} + \frac{1}{42} \cdot (2^5 - 1) \frac{2 u^5}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}\ldots$$

Wir wollen uns nicht länger bei den Formeln aufhalten, welche aus der Formel (17) hergeleitet werden können. Ein Mehreres über diesen Gegenstand findet man in Euler's vortrefflicher Introductio in analysin infinitorum.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Verbesserungen.

S. 26 Z. 8 l. $\frac{a}{\alpha^m}$ statt $\frac{\alpha}{\alpha^m}$

— — — — - $\frac{h}{a}$ statt $\frac{h}{\alpha}$

— — — — - $\frac{k}{a}$ statt $\frac{k}{\alpha}$

— 41 — 17 - zunimmt statt abnimmt

— 47 — 11 - $\alpha^{n-n'}$ statt $L^{n-n'}$

— 58 — 17 - $c_2 z + \ldots + g_2 u$ statt $c_2 z = \ldots + g_2 u$

— 65 — 6 - x verschwindet, statt x,

— — — 11 - $(x - x_{n-1})$ statt $(x - x_{n-1}$

— 85 — 24 - $\varphi(y+x) + \varphi(y-x)$ statt $\varphi(y+x) - \varphi(y-x)$

—110 — 5 - $u_{n-1} \cdot v_{n-1}$ statt u_{n-1}, v_{n-1}

—114 — 4 - $\frac{1}{\infty}$ statt $\frac{}{\infty}$

—131 — 8 - es muß alsdann entweder statt muß alsdann

—166 — 6 - cos. z statt z

—177 — 27 - $\varphi(x) +$ statt $\varphi(x) =$

—181 — 10 - correspondirenden Werthes statt corr., Werthes

— — — 11 - $x = X, \ldots$ statt $x = X \ldots$

—183 — 16 bittet man die Worte „wo .... verschwindet" in eine Klammer einzuschließen.

—196 — 2 l. im Nenner iz sin. θ statt i sin. θ

—197 — 24 - Reihe, s, statt Reihe s,

—201 — 4 bittet man vor dem Worte „nach" ein Komma zu machen.

—209 — 12 bezieht sich $\left\{\begin{matrix} z = -1 \\ z = +1 \end{matrix}\right\}$ auf beide Gleichungen (23).

—210 — 7 u. 8 ist $\left\{\begin{matrix} s = -\frac{\pi}{2} \\ s = +\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}$ ganz wegzustreichen.

— — — 12 l. nur für Bogen statt nur Bogen

—220 — 11 ist im Nenner des ersten Gliedes 2 statt 1 zu setzen.

—222 — 12 l. so statt es

—228 — 1 - cos. u statt cos., u

— — — 8 - im Nenner (unter dem Wurzelzeichen)

$\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2$ statt $\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$

—246 — 5 - $\sqrt{\left\{q - \frac{p^2}{4}\right\}}$ statt $\sqrt{\left\{p - \frac{p^2}{4}\right\}}$

—249 — 9 - im 2ten Factor des ersten Theils der Gleich. $(z - z_2)$ statt $(z - z)$

—271 — 30 - mit eben diesen Nennern, und statt mit gleichen Nennern, aber

—272 — 17 - $F_{m'}(\alpha + \beta i)$ statt $F_{m'}(\alpha - \beta i)$

—275 — 22 - $\varkappa(a_0 + a_1 x + \ldots)$ statt $(a_0 + \ldots)$

Bayerische Staatsbibliothek München

S. 277 Z. 20 l. (12) statt (2)
—279—14 - a_o statt a
—281—11 bittet man das Wort „also" wegzustreichen.
—283— * l. Philos. transactions, 1806 statt Tr. ph. année 1806
—289—13 - dessen Nenner n ist, statt dessen n ist
— ——21 - deren statt dessen
—294—16 - Eine statt Ein
— ——17 am Ende der Zeile l. Zahlengröße statt Zahl
—307—22 l. 2 sin. $\left(\frac{b-a}{2}\right)$ statt 2 sin. $\left(\frac{a-b}{2}\right)$
—308—15 - aus der ersten Formel (13) statt aus (13)
— ——26 - für 2 der Winkel a, b, c statt für a, b, c
—338—24 - F (X) statt F (x)
—341— 6 - einer von den beiden statt den beiden
—342— 2 - $+ A_u x^{m-u}$ statt $A_u x^{m-u}$
—345—11 - mod. F_1 (a) statt mod. F(a)
—346—33 - $2(2\alpha) F_2(\xi)$ statt $2(2a) F_2(\xi)$
— ——37 - Zahlenwerthes statt Gliedes
—347— 2 - Wurzel b statt Wurzel
—351—32 - $(1-4\alpha q)$ statt $(1-4aq)$
— ——33 - $(1+4\alpha q)$ statt $(1+4aq)$
—354— 9 - Decimalstelle von der höchsten der Ordnungen statt Decimalstellen von den Ordnungen
—355—2 u. 4 l. ξ_1 statt ξ
— ——18 l. $F(\xi_1+z)$, $F(\xi_1+\beta)$ statt $F(\xi+z)$, $F(\xi+\beta)$
—359— 8 - $q < 0{,}01$ ist statt q ist, und $< 0{,}01$
—362—10 - 1,6920 statt 1,6902
— ——25 - — 7 statt 7
—364— 9 - $x = -3+z$ statt $x = -3+x$
— ——36 „welche von ..... beziehen" soll heißen: „von welchen der zweite die von Descartes gegebene Regel über die Bestimmung der Anzahl der positiven und negativen Wurzeln enthält,"
—369—29 l. x^o statt x_o
—382—25 - welche unten einen Index statt welche einen Index
— ——26 - und oben statt und
—384—30 - welche oben mit statt welche mit
— ——39 - $\varrho_{n+2^{(m-1)}}$ statt $_{n+2^{(m-1)}}$
—393— 4 - $\frac{i}{2}(e^{lx}-e^{-lx})$ statt $\frac{i}{2} e^{lx}-e^{lx})$
— ——11 - 2.4.6.8.10.12 statt 2.4.8.10.12
— ——13 - $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ statt $\left(x-\frac{1}{x}\right)$
—394— 3 - desselben Paragraphen statt im vorigen P.
—396—18 - hingegen in statt hingegen
$\frac{2mz^2}{e^{n^2\pi^2}}(1+\delta).M(0,1)$ statt $e\frac{2mz^2}{n^2\pi^2}(1+\delta).M(0,1)$
—409— 4 - $e^{n^2\pi^2}$
—412—18 - z statt x

Bayerische Staatsbibliothek München

SCHIEDECK
Handbuchbi

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Cauchy, Augustin Louis,

A. L. Cauchy's Lehrbuch der algebraischen Analysis

Königsberg 1828

Math.p. 715 x
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083258-3